Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 10 — Abgabe: 05.07.2016

Aufgabe 33 (Bilineare Abbildung auf Vierecken) — 4 Punkte

Es sei $R_0 := [0,1] \times [0,1]$ das Referenzrechteck. $\bar{a}_i, i = 0, \ldots, 3$ bezeichne seine gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken. Eine Abbildung $F : R_0 \to \mathbb{R}^2$ heißt bilinear, wenn F in jeder Variable separat affin ist, d.h. $F(x,y) := c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy$ mit $c_i \in \mathbb{R}^2$ für $i = 0, \ldots 3$. Weiter seien a_i die gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken eines Vierecks R und $\operatorname{span}\{\phi_{ij}, i,j = 1, \ldots 2\}$ mit $\phi_{ij}(x,y) = \tilde{\phi}_i(x)\tilde{\phi}_j(y)$ und $\tilde{\phi}_i$ den klassischen Lagrange-Basisfunktionen in 1D, der lokale Raum auf R.
Zeigen Sie:

(i) Es gibt genau eine bilineare Abbildung F mit $F(\bar{a}_i) = a_i$ für $i = 0, \ldots, 3$. Stellen Sie F als Konvexkombination ihrer Werte in den Knoten dar.

(ii) F bildet R_0 bijektiv auf R ab genau dann, wenn R konvex ist.

(iii) F ist genau dann linear, wenn R ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 34 (Steifigkeitsmatrix einer triangulierten Fläche) — 4 Punkte

Es sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ eine triangulierte Fläche bestehend aus den Dreiecken T_i mit den Ecken (a_0^i, a_1^i, a_2^i). Außerdem seien

$$\nabla_T u = (1 - n \otimes n)\nabla_{\mathbb{R}^3} u \quad \text{mit} \quad n \perp T,$$

$$V_h = \{u : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \mid u_{|_T} \text{ affin}, \ u \in C^0(\cup_i T_i)\},$$

$$a(u_h, v_h) = \int_T \nabla_T u_h \cdot \nabla_T v_h \quad \text{mit } u_h, v_h \in V_h\,.$$

Berechnen Sie die lokale Steifigkeitsmatrix in Termen der Kantenvektoren.

Aufgabe 35 (Stetiger Erweiterungsoperator) — 4 Punkte

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie einen stetigen, linearen Erweiterungsoperator $T \colon C^k([0,1) \times \Omega) \to C^k((-1,1) \times \Omega)$ an.

Hinweis: Definieren Sie für $f \in C^k([0,1) \times \Omega)$, $x \in \Omega$ und $t \in (0,1)$ die Erweiterung durch $(Tf)(-t,x) := \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j f(\frac{t}{j}, x)$ für eine geeignete Wahl von Koeffizienten λ_j.

Aufgabe 36 (Quadraturformel auf Dreiecken) **4 Punkte**

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein nicht-entartetes Dreieck mit den Ecken a_0, a_1 und a_2. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{P}_3(T)$ die Quadraturformel

$$\int_T f\,dx = \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=0}^{2} f(a_i) + 8 \sum_{0\leq i<j\leq 2} f(a_{ij}) + 27 f(a_{012})),$$

wobei $a_{ij} = \frac{a_i+a_j}{2}$ und $a_{012} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} a_i$. Zeigen Sie weiter, dass die Gleichheit für Polynome aus $\mathcal{P}_4(T)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Hinweis: Benutzen Sie, dass für ein Simplex $T \in \mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ die Formel

$$\int_T \lambda^\alpha\,dx = \frac{\alpha! d!}{(|\alpha| + d)!}|T|$$

gilt, wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}$ einen Multiindex bezeichnet.