Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 10 — Abgabe: 05.07.2016

Aufgabe 33 (Bilineare Abbildung auf Vierecken) — 4 Punkte

Es sei $R_0 := [0,1] \times [0,1]$ das Referenzrechteck. $\bar{a}_i, i = 0,\dots,3$ bezeichne seine gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken. Eine Abbildung $F : R_0 \to \mathbb{R}^2$ heißt bilinear, wenn F in jeder Variable separat affin ist, d.h. $F(x,y) := c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy$ mit $c_i \in \mathbb{R}^2$ für $i = 0,\dots 3$. Weiter seien a_i die gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken eines Vierecks R und $\mathrm{span}\{\phi_{ij}, i,j = 1,\dots 2\}$ mit $\phi_{ij}(x,y) = \tilde{\phi}_i(x)\tilde{\phi}_j(y)$ und $\tilde{\phi}_i$ den klassischen Lagrange-Basisfunktionen in 1D, der lokale Raum auf R.
Zeigen Sie:

(i) Es gibt genau eine bilineare Abbildung F mit $F(\bar{a}_i) = a_i$ für $i = 0,\dots,3$. Stellen Sie F als Konvexkombination ihrer Werte in den Knoten dar.

(ii) F bildet R_0 bijektiv auf R ab genau dann, wenn R konvex ist.

(iii) F ist genau dann linear, wenn R ein Parallelogramm ist.

Lösung

Es gilt $F(x,y) := c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy$ wie in der Aufgabe angegeben.

(i) *Wir zeigen:* Es existiert genau ein derartiges F mit $F(\bar{a}_i) = F(a_i)$:

$$
\begin{aligned}
F(\bar{a}_0) &= c_0 = a_0\\
F(\bar{a}_1) &= c_0 + c_1 = a_1 \Rightarrow c_1 = a_1 - a_0\\
F(\bar{a}_3) &= c_0 + c_2 = a_3 \Rightarrow c_2 = a_3 - a_0\\
F(\bar{a}_2) &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = a_2 \Rightarrow c_3 = a_2 - a_1 - a_3 + a_0
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= a_0 + x(a_1 - a_0) + y(a_3 - a_0) + xy(a_2 - a_1 - a_3 + a_0) \qquad (1)\\
&= (1 - x - y + xy)a_0 + x(1-x)a_1 + y(1-x)a_3 + xya_2\\
&= \sum_{i=0}^{3} \lambda_i a_i
\end{aligned}
$$

und $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$.

Zu $\lambda_0 \geq 0$: $\lambda_0(x,y)$ ist harmonisch. Damit gilt

$$
\min_{(x,y)\in R_0} \lambda_0 = \min_{(x,y)\in \partial R_0} \lambda_0 \geq 0 \,.
$$

(ii) $\Rightarrow$: F ist bijektiv, also lässt sich jeder Punkt in $b \in R$ als Bild $F(\bar{b})$ eines Punktes $\bar{b} \in R_0$ darstellen. Mit Formel (1) folgt dann, dass R konvex ist.

$\Leftarrow$: R ist konvex, also lässt sich jeder Punkt in $b \in R$ als Konvexkombination der Ecken a_i darstellen. Seien $\lambda_i(b)$ so, dass $\sum_i \lambda_i(b) a_i = b$. Nach (1) ist $F(\sum_i \lambda_i \bar{a}_i) = b$ und $\bar{b} = \sum_i \lambda_i \bar{a}_i$ eindeutiges Urbild von b. Also existiert eine inverse Funktion und F ist bijektiv.

(iii) F ist affin linear genau dann, wenn $c_3 = 0$, also wenn $a_2 - a_1 = a_3 - a_0$. Dies ist genau für Parallelogramme der Fall.

Aufgabe 34 (Steifigkeitsmatrix einer triangulierten Fläche) 4 Punkte

Es sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ eine triangulierte Fläche bestehend aus den Dreiecken T_i mit den Ecken (a_0^i, a_1^i, a_2^i). Außerdem seien

$$\nabla_T u = (1 - n \otimes n) \nabla_{\mathbb{R}^3} u \quad \text{mit} \quad n \perp T,$$

$$V_h = \{u : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \mid u_{|T} \text{ affin }, \ u \in C^0(\cup_i T_i)\},$$

$$a(u_h, v_h) = \int_T \nabla_T u_h \cdot \nabla_T v_h \quad \text{mit } u_h, v_h \in V_h\,.$$

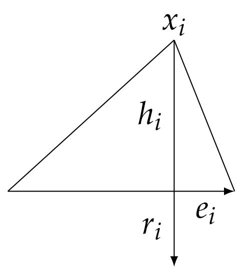
Berechnen Sie die lokale Steifigkeitsmatrix in Termen der Kantenvektoren.

Lösung

Seien x_1, x_2, X_3 so, dass $T = \operatorname{conv}(x_1, x_2, x_3)$ und Φ_i so, dass $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Für die Steifigkeitsmatrix gilt

$$(L_T)_{ij} = \int_T \nabla_t \Phi_i \nabla_t \Phi_j \, \mathrm{d}x = |T| \nabla_T \Phi_i \cdot \nabla_t \Phi_j\,.$$

Bemerkung: Da Φ_i affin, ist $\nabla_T \Phi_i$ konstant auf T.



Mit den Bezeichnungen aus der Skizze folgt für den Gradienten $\nabla_T \Phi_i = -\frac{r_i}{h_i}$ und somit

$$(L_T)_{ij} = |T| \frac{r_i}{h_i} \cdot \frac{r_j}{h_j}\,.$$

Es gilt weiterhin $h_i \|e_i\| = 2|T|$ und $\frac{e_i}{\|e_i\|} = R_T^{90} r_i$, wobei R_T^{90} die Rotation um 90 Grad in der Dreiecksebene ist. Damit gilt schließlich

$$(L_T)_{ij} = |T| \frac{e_i \cdot e_j}{h_i h_j \|e_i\| \|e_j\|} = \frac{e_i \cdot e_j}{4|T|}\,.$$

Aufgabe 35 (Stetiger Erweiterungsoperator) **4 Punkte**

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie einen stetigen, linearen Erweiterungsoperator $T\colon C^k([0,1) \times \Omega) \to C^k((-1,1) \times \Omega)$ an.

Hinweis: Definieren Sie für $f \in C^k([0,1) \times \Omega)$, $x \in \Omega$ und $t \in (0,1)$ die Erweiterung durch $(Tf)(-t,x) := \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j f(\frac{t}{j}, x)$ für eine geeignete Wahl von Koeffizienten λ_j.

Lösung

Für eine beliebige Funktion $f \in C^k([0,1) \times \Omega$ machen wir den folgenden Ansatz:

$$(Tf)(t,x) := \begin{cases} f(t,x), & \text{für } (t,x) \in [0,1) \times \Omega, \\ \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j f(-t/j, x), & \text{für } (t,x) \in (-1,0) \times \Omega, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten später gewählt werden. Offensichtlich ist T linear in f. Desweiteren ist Tf in $(-1,0) \times \Omega$ und $[0,1) \times \Omega$ k-mal stetig differenzierbar. Damit $Tf \in C^k((-1,1) \times \Omega)$ muss also gezeigt werden, dass für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt, dass

$$\lim_{t \searrow 0} \partial^\alpha (Tf)(-t,x) = \partial^\alpha f(0,x), \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Insbesondere muss für alle $x \in \Omega$ und alle $n \leq k$ gelten, dass

$$\partial_t^n f(0,x) = \lim_{t \searrow 0} \partial_t^n (Tf)(-t,x) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{j^n} \lim_{t \searrow 0} (\partial_t^n f)(t/j, x) = \partial_t^n f(0,x) \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{j^n}.$$

Demnach haben wir die notwendige Bedingung $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{j^n} = 1$ für alle $n = 0, 1, \ldots, k$ oder in Matrix-Schreibweise

$$\mathbf{A}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})^T = (1, 1, \ldots, 1)^T,$$

mit der Vandermonde-Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ definiert durch $\mathbf{A}_{ij} = j^{-(i-1)}$. Da die Vandermonde-Matrix regulär ist, gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})^T$, sodass die obige Gleichung gilt. Dann folgt aber auch

$$\lim_{t \searrow 0} \partial_t^n \partial^\alpha (Tf)(-t,x) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{j^n} \lim_{t \searrow 0} \partial^\alpha ((\partial_t^n f)(t/j, x)) = \partial_t^n \partial^\alpha f(0,x),$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $\alpha_1 = 0$ und $|\alpha| + n \leq k$. Damit haben wir gezeigt, dass $Tf \in C^k((-1,1) \times \Omega)$. Es bleibt noch die Stetigkeit von T zu zeigen. Dazu betrachten wir für α und n wie oben, $t > 0$ und $x \in \Omega$

$$|\partial_t^n \partial^\alpha Tf(-t,x)| \leq \sum_{j=1}^{k+1} \frac{|\lambda_j|}{j^n} |\partial^\alpha ((\partial_t^n f)(t/j, x))| \leq \left(\sum_{j=1}^{k+1} |\lambda_j| \right) \|\partial^\alpha \partial_t^n f\|_\infty.$$

Damit folgt schließlich

$$\|Tf\|_{C^k((-1,1)\times\Omega)} \leq \left(\sum_{j=1}^{k+1} |\lambda_j|\right) \|f\|_{C^k([0,1)\times\Omega}.$$

Aufgabe 36 (Quadraturformel auf Dreiecken) **4 Punkte**

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein nicht-entartetes Dreieck mit den Ecken a_0, a_1 und a_2. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{P}_3(T)$ die Quadraturformel

$$\int_T f\,dx = \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=0}^{2} f(a_i) + 8 \sum_{0\leq i<j\leq 2} f(a_{ij}) + 27f(a_{012})),$$

wobei $a_{ij} = \frac{a_i+a_j}{2}$ und $a_{012} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} a_i$. Zeigen Sie weiter, dass die Gleichheit für Polynome aus $\mathcal{P}_4(T)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Hinweis: Benutzen Sie, dass für ein Simplex $T \in \mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ die Formel

$$\int_T \lambda^\alpha\,dx = \frac{\alpha!d!}{(|\alpha| + d)!}|T|$$

gilt, wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}$ einen Multiindex bezeichnet.

Lösung

Wir zeigen die Quadraturformel zunächst für die kubischen Lagrange-Basisfunktionen (in baryzentrischen Koordinaten). Dabei genügt es die Fälle

$$\begin{aligned}
\varphi_{iii}(\lambda) &= \tfrac{9}{2}\lambda_i(\lambda_i - \tfrac{1}{3})(\lambda_i - \tfrac{2}{3}) = \tfrac{9}{2}(\lambda_i^3 - \lambda_i^2 + \tfrac{2}{9}\lambda_i),\\
\varphi_{ijj}(\lambda) &= \tfrac{27}{2}\lambda_i\lambda_j(\lambda_j - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{27}{2}\lambda_j^2\lambda_i - \tfrac{9}{2}\lambda_j\lambda_i,\\
\varphi_{ijk}(\lambda) &= 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k
\end{aligned}$$

zu betrachten. Wir rechnen nun zunächst das Integral mit Hilfe der Formel für baryzentrische Koordinaten (siehe Hinweis) und vergleichen dies mit dem Ergebnis für die Quadraturformel.

- φ_{iii}: Die Integralformel ergibt:

  $$\tfrac{9}{2}\left(\int_T \lambda_i^3\,dx - \int_T \lambda_i^2\,dx + \tfrac{2}{9}\int_T \lambda_i\,dx\right) = \tfrac{9}{2}\left(\tfrac{2\cdot(3!)}{5!} - \tfrac{2\cdot(2!)}{4!} + \tfrac{2}{9}\tfrac{2\cdot(1!)}{3!}\right)|T| = \frac{1}{30}|T|.$$

  Die Quadraturformel ergibt:

  $$\tfrac{|T|}{60}\left(3\cdot 1 - 8\cdot 2\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right)\cdot\tfrac{9}{2}\right) = \tfrac{1}{30}|T|.$$

- φ_{ijj}: Analoge Rechnungen ergeben für das Integral

  $$\int_T \varphi_{ijj}(\lambda)\,dx = \tfrac{3}{40}|T|$$

  und für die Quadraturformel

  $$\tfrac{|T|}{60}\left(3\cdot 0 + 8\tfrac{9}{16} + 0\right) = \tfrac{3}{40}|T|.$$

- φ_{ijk}: Die Integralformel ergibt

  $$\int_T \varphi_{ijk}(\lambda)\,dx = 27\tfrac{2}{5!}|T| = \tfrac{9}{20}|T|$$

  und die Quadraturformel liefert

  $$\frac{|T|}{60}\left(3\cdot 0 + 8\cdot 0 + 27\cdot 1\right) = \tfrac{9}{20}|T|.$$

Die übrigen Basisfunktionen können auf diese Fälle (durch Umindizierung) zurückgeführt. Also gilt die Gleichheit für eine Basis von $\mathcal{P}_3$ und damit für den gesamten Raum der kubischen Polynome. Um zu zeigen, dass die Quadraturformel für allgemeine quartische Polynome nicht gilt, kann zum Beispiel die Funktion

$$\psi(\lambda) = \lambda_i(\lambda_i - \tfrac{1}{4})(\lambda_i - \tfrac{1}{2})(\lambda_i - \tfrac{3}{4})$$

betrachten. Diese ist offensichtlich ein Element aus $\mathcal{P}_4$ und man rechnet leicht nach, dass

$$\int_T \psi(\lambda)\,dx = \int_T \lambda_i^4 - \tfrac{3}{2}\lambda_i^3 + \tfrac{11}{16}\lambda_i^2 - \tfrac{3}{32}\lambda_i\,dx 0.$$

Die Quadraturformel hingegen liefert

$$\tfrac{|T|}{60}(3\cdot\tfrac{3}{32} + 8\cdot 0 + \tfrac{5}{96}) = \tfrac{|T|}{180}.$$