Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 11 — Abgabe: 12.07.2016

Aufgabe 37 (Biharmonische Gleichung) — 4 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= r, \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \partial_n u &= \gamma, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ und $r, \gamma \in L^2(\partial\Omega)$. Hierbei bezeichne $\Delta^2 = \Delta\Delta$ den Bilaplace-Operator. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ genau dann Lösung ist, wenn Sie die Randbedingungen und die schwache Formulierung

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^{2,2}(\Omega)$$

erfüllt, wobei $H_0^{2,2}(\Omega)$ der Raum aller Funktionen $\varphi \in H^{2,2}(\Omega)$ ist, für die sowohl φ als auch $\partial_n\varphi$ auf dem Rand von Ω verschwinden.

Aufgabe 38 (Tensorprodukt-Hermite-Approximation) — 4 Punkte

Betrachten Sie die biharmonische Gleichung aus Aufgabe 37 mit $r = \gamma = 0$ für ein Gebiet der Form $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$. Es sei $V_h \subset H_0^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Raum der kubischen Tensorprodukt-Hermite-FE-Funktionen bezüglich eines Rechteckgitters mit Gitterweite $h > 0$.
Zeigen Sie, dass der Approximationsfehler für die resultierende diskrete Lösung $u_h \in V_h$ durch

$$\|u - u_h\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^{4,2}(\Omega)}$$

abgeschätzt werden kann, falls die Lösung u des Problems in $H^{4,2}(\Omega)$ liegt.

Hinweis: Für eine Funktion $v \in C^2(\Omega)$ bezeichne $I_h v$ die Interpolierende von v, die sich stückweise als Tensorprodukt der Hermite-Interpolation aus Aufgabe 27 von Blatt 8 darstellen lässt. Machen Sie sich klar, dass I_h Funktionen aus $H^{4,2}(\Omega)$ nach $H^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ abbildet und verwenden Sie eine angepasste Version von Satz 3.25 aus der Vorlesung um den Approximationsfehler abzuschätzen.

Aufgabe 39 (Notwendige Bedingung Minimierer) 4 Punkte

Betrachten Sie auf einem Gebiet Ω eine Funktion u_k aus $H^{1,2}(\Omega)$ und das Funktional

$$E[u] = \int_\Omega \frac{1}{2\tau}(u - u_k)^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Leiten Sie eine notwendige Bedingung für den Minimierer über $H_0^{1,2}(\Omega)$ her. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Minimierer und der Wärmeleitungsgleichung?

Aufgabe 40 (Abschätzung mit Aubin-Nitsche) 4 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem auf $\Omega = (0, 1)$

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und zeigen Sie

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2},$$

wobei wie bisher h die Diskretisierungsfeinheit und k den Polynomgrad bezeichnet.

Hinweis: Suchen Sie für festes $x \in \Omega$ eine Darstellung von $(u - u_h)(x)$ in der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, d.h. $(u - u_h)(x) = a(u - u_h, G_x)$. Dabei ist $G_x(y) = G(x, y)$ die Greensche Funktion in 1D (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 22). Betrachten Sie außerdem das Lemma von Aubin-Nitsche.