Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 11 — Abgabe: 12.07.2016

Aufgabe 37 (Biharmonische Gleichung) **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= r, \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \partial_n u &= \gamma, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ und $r, \gamma \in L^2(\partial\Omega)$. Hierbei bezeichne $\Delta^2 = \Delta\Delta$ den Bilaplace-Operator. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ genau dann Lösung ist, wenn Sie die Randbedingungen und die schwache Formulierung

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^{2,2}(\Omega)$$

erfüllt, wobei $H_0^{2,2}(\Omega)$ der Raum aller Funktionen $\varphi \in H^{2,2}(\Omega)$ ist, für die sowohl φ als auch $\partial_n\varphi$ auf dem Rand von Ω verschwinden.

Lösung

Mit partieller Integration für schwache Ableitungen gilt für alle $\varphi \in H_0^{2,2}(\Omega)$ und $u \in H^{4,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi \, dx &= -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u \, \partial_n\varphi \, dS \\ &= \int_\Omega \Delta^2 u \, \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n(\Delta u) \, \varphi \, dS + \int_{\partial\Omega} \Delta u \, \partial_n\varphi \, dS \\ &= \int_\Omega \Delta^2 u \, \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Ist $u \in C^4(\overline{\Omega})$ also eine Lösung des Randwertproblems, so folgt

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi \, dx = \int_\Omega \Delta^2 u \, \varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx.$$

Erfüllt umgekehrt $u \in C^4(\overline{\Omega})$ die Randbedingungen und die Integralgleichung für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^{2,2}(\Omega)$, so folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$\Delta^2 u = f$ fast überall in Ω. Falls $f \in C(\Omega)$, dann gilt die Gleichheit auch punktweise, sodass u Lösung des Randwertproblems ist.

Aufgabe 38 (Tensorprodukt-Hermite-Approximation) 4 Punkte

Betrachten Sie die biharmonische Gleichung aus Aufgabe 37 mit $r = \gamma = 0$ für ein Gebiet der Form $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$. Es sei $V_h \subset H_0^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Raum der kubischen Tensorprodukt-Hermite-FE-Funktionen bezüglich eines Rechteckgitters mit Gitterweite $h > 0$.
Zeigen Sie, dass der Approximationsfehler für die resultierende diskrete Lösung $u_h \in V_h$ durch

$$\|u - u_h\|_{H^{2,2}(\Omega)} \le Ch^2 \|u\|_{H^{4,2}(\Omega)}$$

abgeschätzt werden kann, falls die Lösung u des Problems in $H^{4,2}(\Omega)$ liegt.

Hinweis: Für eine Funktion $v \in C^2(\Omega)$ bezeichne $I_h v$ die Interpolierende von v, die sich stückweise als Tensorprodukt der Hermite-Interpolation aus Aufgabe 27 von Blatt 8 darstellen lässt. Machen Sie sich klar, dass I_h Funktionen aus $H^{4,2}(\Omega)$ nach $H^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ abbildet und verwenden Sie eine angepasste Version von Satz 3.25 aus der Vorlesung um den Approximationsfehler abzuschätzen.

Lösung

Für eine Funktion $v \in C^2(\Omega)$ sei $I_h v$ die kubische Tensorprodukt-Hermite-Interpolation, d.h. auf jedem rechteckigen Element ist $I_h v$ ein bikubisches Polynom, mit $(I_h v)(x_0) = v(x_0)$, $\partial_x (I_h v)(x_0) = \partial_x v(x_0)$, $\partial_y (I_h v)(x_0) = \partial_y v(x_0)$ und $\partial_{xy}(I_h v)(x_0) = \partial_{xy} v(x_0)$ für jede Ecke x_0 des Rechtecks. (Man kann sich leicht überlegen, dass I_h damit das Tensorprodukt der eindimensionalen Hermite-Interpolation $\mathcal{I}_h$ aus Aufgabe 27 ist.) Nun kann man das Folgende feststellen:

- Aus der Definition von I_h folgt direkt, dass $I_h v \in C^1(\overline{\Omega})$.
- Desweiteren, kann man analog wie in Aufgabe 27 zeigen, dass auch $I_h v \in H^{2,2}(\Omega)$. Hierbei muss man bei der partiellen Integration darauf achten, dass die Normalen auf dem Rand von benachbarten Elementen sich gegenseitig wegheben.

Also ist $I_h v \in H_0^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Für die Fehlerabschätzung verwenden wir zunächst das Lemma von Céa und erhalten

$$\|u - u_h\|_{H^{2,2}(\Omega)} \le C\|u - I_h u\|_{H^{2,2}(\Omega)}, \tag{1}$$

wobei wegen des Sobolev-Einbettungssatzes $H^{4,2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$, sodass $I_h u$ wohldefiniert ist. Die Aussage der Aufgabe folgt nun aus einer abgewandelten Version von Satz 3.25 aus der Vorlesung. Dafür ersetzen wir die Simplices T und $\hat{T}$ mit einem Rechteck Q bzw. dem Einheitsquadrat, $k = 3$ und $p = q = 2$. Weiterhin ist $\hat{I}$ die oben beschriebene kubische Tensorprodukt-Hermite-Interpolation auf dem Einheitsquadrat und I das Analogon auf dem gegebenen Rechteck. Da die Hermite-Interpolation auf den bikubischen Polynomen $\mathcal{P}_3^2$ trivial ist, sind die nötigen Voraussetzungen erfüllt, sodass wir für $m = 0, 1, 2$ die Abschätzung

$$|u - I_h u|_{H^{m,2}(Q)} \leq C h^{4-m} |u|_{H^{4,2}(Q)}$$

erhalten. Schließlich summieren wir noch über alle Elemente des gegebenen (regulären) Rechteckgitters und bekommen den gesamten Interpolationfehler

$$|u - I_h u|_{H^{m,2}(\Omega)} \leq C h^{4-m} |u|_{H^{4,2}(\Omega)} \tag{2}$$

für $m = 0, 1, 2$. Mit (1) erhalten wir schließlich (für kleine $h > 0$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$)

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^{2,2}(\Omega)} &\leq C_1 \sum_{m=0}^{2} |u - I_h u|_{H^{m,2}(\Omega)} \\
&\leq C_2 \sum_{m=0}^{2} h^{4-m} |u|_{H^{4-m,2}(\Omega)} \\
&\leq C_3 h^2 \|u\|_{H^{4,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 39 (Notwendige Bedingung Minimierer) 4 Punkte

Betrachten Sie auf einem Gebiet Ω eine Funktion u_k aus $H^{1,2}(\Omega)$ und das Funktional

$$E[u] = \int_\Omega \frac{1}{2\tau}(u - u_k)^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Leiten Sie eine notwendige Bedingung für den Minimierer über $H_0^{1,2}(\Omega)$ her. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Minimierer und der Wärmeleitungsgleichung?

Lösung

Berechne die erste Variation von $E[u]$. Die letzte Gleichung gilt nur, falls $u \in H^{2,2}$.

$$\begin{aligned}
&\partial_\delta E[u + \delta v]_{|\delta=0} \\
&= \partial_\delta \left(\int_\Omega \frac{1}{2\tau}(u + \delta v - u_k)^2 + \delta^2 \langle \nabla u, \nabla u \rangle + 2\delta \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \nabla v, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}x \right)_{|\delta=0} \\
&= \partial_\delta \Bigg(\int_\Omega \frac{1}{2\tau} \big((u - u_k)^2 + 2(u - u_k)\delta v + \delta^2 v \big) \\
&\qquad\qquad + \delta^2 \langle \nabla u, \nabla u \rangle + 2\delta \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \nabla v, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}x \Bigg)_{|\delta=0} \\
&= \int_\Omega \frac{u - u_k}{\tau} v + 2 \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{u - u_k}{\tau} - 2\Delta u \right) v \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Für einen Minimierer u von E gilt also

$$\frac{u - u_k}{\tau} - 2\Delta u = 0\,,$$

d. h. u löst eine diskrete Variante der Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 40 (Abschätzung mit Aubin-Nitsche) **4 Punkte**

Betrachten Sie das folgende Problem auf $\Omega = (0,1)$

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und zeigen Sie

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2},$$

wobei wie bisher h die Diskretisierungsfeinheit und k den Polynomgrad bezeichnet.

Hinweis: Suchen Sie für festes $x \in \Omega$ eine Darstellung von $(u - u_h)(x)$ in der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$, d. h. $(u - u_h)(x) = a(u - u_h, G_x)$. Dabei ist $G_x(y) = G(x,y)$ die Greensche Funktion in 1D (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 22). Betrachten Sie außerdem das Lemma von Aubin-Nitsche.

Lösung

Für eine Lösung gilt $\int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ und somit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 u'(y)G'(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Betrachte weiterhin $\int_0^1 G(x,y)f_h(y)\,\mathrm{d}y$. Es gilt

$$\int_0^1 u_h'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_h(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

und somit auch

$$u_h(x) = \int_0^1 u_h'(y)G'(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Wir erhalten die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_h(x)| &= \left|\int_0^1 (u - u_h)(y)G'(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|(u - u_h)'(y)(G_x - I_hG_x)'(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \|u - u_h\|_{1,2}\|G_x - I_hG_x\|_{1,2} && (3) \\ &\leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2} && (4) \end{aligned}$$

Für Ungleichung (3) verwenden wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, für Ungleichung (4) das Lemma von Céa. Schließlich erhalten wir

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2}\,.$$