

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 12 (Wiederholung)

keine Abgabe

Die folgenden Fragen und Aufgabenstellungen können als Leitfaden zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden. Sie dienen nur als Anhaltspunkt und entsprechen nicht den tatsächlichen Prüfungsfragen. In den Übungen wird der Fragenkatalog zusammen mit den Tutoren durchgegangen, sodass Unklarheiten beseitigt werden können.

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Geben Sie einige Beispiele von Anfangswertproblemen an.
- Wie transformiert man eine gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System erster Ordnung?
- Geben Sie ein Beispiel für eine gewöhnliche Differentialgleichung an, die eine nicht eindeutige Lösung besitzt.
- Wie beweist man den Satz von Picard-Lindelöf?
- Wie löst man ein Anfangswertproblem der Form $y' = \mathbf{A}y, y(t_0) = y_0$ mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$?
- Wie lässt sich ein Anfangswertproblem mit der Methode der Variation der Konstanten lösen?
- Beschreiben Sie die kontinuierliche und diskrete Phasenfluss-Formulierung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.
- Wie kann man die Fehlerfortpflanzung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit Hilfe einer Differentialgleichung der Störung beschreiben?
- Beweisen Sie, dass Stabilität und Konsistenz einer diskreten Evolution deren Konvergenz implizieren.
- Wie sind das explizite/implizite Euler-Verfahren, das Cauchy-Euler-Verfahren und allgemeine Runge-Kutta-Verfahren definiert?

- Wie beweist man die Konsistenz von expliziten/impliziten Euler- und Cauchy-Euler-Verfahren?
- Was können Sie über die Kondition im Fall der Diskretisierung der Wärmeleitung $\dot{u}_h = -L_h u_h$ sagen?
- Wie lässt sich die Idee hinter Runge-Kutta-Verfahren zusammenfassen?
- Geben Sie zwei Beispiele für explizite Runge-Kutta-Verfahren an.
- Wie lässt sich ein Runge-Kutta-Verfahren mit Hilfe eines Butcher-Tableaus zusammenfassen? Geben Sie den Algorithmus für ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren an.
- Weshalb betrachtet man implizite Runge-Kutta-Verfahren?
- Welche Rolle spielt die Linearisierung von nicht-linearen Differentialgleichungen um einen Fixpunkt und die rationale Approximationen der Exponentialfunktion in der Stabilitätsanalyse von numerischen Verfahren?
- Wie können implizite Runge-Kutta-Verfahren aus numerischen Quadraturformeln hergeleitet werden?
- Geben Sie zwei Beispiele für implizite Runge-Kutta-Verfahren an.

2 Interpolation und Approximation

- Beschreiben Sie die eindimensionale Lagrange- und Hermite-Interpolation. Wie lässt sich die Interpolation mit Hilfe der Newton-Basis darstellen?
- Wie zeigt man die Abschätzung für den Interpolationsfehler mit Hilfe der Darstellungsformel (ohne Beweis)?
- Beschreiben Sie die simpliziale Lagrange-Interpolation. Wie lauten die Lagrange-Basisfunktionen?
- Wann heißt eine Triangulierung zulässig? Wie definiert man den Finite-Element-Raum $V_{k,h}$ auf einer gegebenen Triangulierung?
- Beschreiben Sie das Beweisschema zur Fehlerabschätzungen in der Maximumnorm für die Lagrange-Interpolation?
- Wie sind Bézierflächen definiert? Beschreiben Sie das de-Casteljau-Schema mit Hilfe von Multiindizes und partiellen Polynomen.

3 Finite Elemente

- Was ist eine schwache Ableitung und wie ist sie definiert?
- Wie sind Sobolev-Räume definiert?
- Warum eignet sich der Raum $H^{1,2}$ für die Finite-Elemente-Methode? Beschreiben Sie kurz die Eigenschaften dieses Raums und der zugehörigen Finiten Elemente.
- Wie kann man Randwerte von Sobolev-Funktionen behandeln? Was besagt der Spursatz (ohne Beweis)?
- Was besagen der Projektionssatz, der Riesz'sche Darstellungssatz und die Poincaré-Ungleichung?
- Geben Sie einen Existenzsatz für lineare elliptische Randwertprobleme mit allgemeinem Operator und Dirichlet-Rand (d. h. ohne Neumann-Rand) an.
- Wie stellt man die Steifigkeitsmatrix und das Gleichungssystem zum diskreten elliptischen Randwertproblem auf? Wie löst man das diskrete Randwertproblem?
- Was besagt das Lemma von Céa?
- Welche Interpolationsabschätzungen können Sie angeben und wie beweist man diese Abschätzungen?
- Geben Sie den Konvergenzsatz für die Finite-Elemente-Approximation an. Welche Fehlerordnung erhalten Sie in der Energienorm?
- Was besagt der Satz von Aubin-Nitsche und wie erhält man daraus eine Aussage über L^2 -Konvergenz für Nullrandwerte?

4 Parabolische Differentialgleichungen

- Leiten Sie ein Anfangswertproblem her.
- Was ist eine Fundamentallösung? Was bedeutet "im Distributionensinn" in diesem Zusammenhang?
- Leiten Sie ein Orthonormalsystem aus Eigenwerten her (diskret und kontinuierlich).