Einführung in die Numerik

1. Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Problemstellung: zu $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ finde man $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, so dass

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= F(t,x) \\ x(0) &= x^0 \end{aligned}\right\} \text{(Anfangswertproblem)}$$

Bem: im Allgemeinen $F : D \to \mathbb{R}^d$ $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen

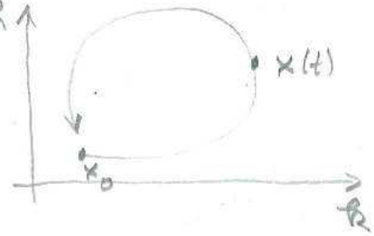
1.1. Bsp

(i) Räuber-Beute-Modell

k Karpfenpopulation
h Hechtpopulation

$$\dot{\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta h(t))\, k(t) \\ (-\gamma + \delta k(t))\, h(t) \end{pmatrix}$$

$\alpha \triangleq$ Vermehrung $\quad \beta \triangleq$ Dezimierung durch Feinde
$\gamma \triangleq$ Konkurrenz $\quad \delta \triangleq$ Nahrungsangebot

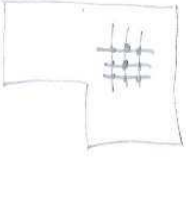


(ii) Lorenzmodell

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\alpha(x_1 - x_2) \\ x_1(\lambda - x_3) - x_2 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, λ freier Parameter ($\lambda = 28$) $\rightsquigarrow$ chaotische Dynamik

(iii) Zeitdiskretisierung der bereits ortsdiskreten Wärmeleitung (vgl. WS15/16):



u_h Gitterfunktion auf einem Gitter Ω_h zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und zum kont. Pb:

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{in } (0,T) \times \Omega \qquad \text{Quelle}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{auf } \Omega$$

$$u(t,x) = 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega$$

Ortsdiskretisierung: Gesucht $u_h : [0,T] \to \mathbb{R}^N$, $N = \# \Omega_h$ mit

$$\partial_t u_h(t) = \Delta_h u_h(t) + f_h(t)$$

$$u_h(0) = u_h^0$$

dabei $F(t, u_h) = \Delta_h u_h(t) + f_h(t)$

knotenweise Quelle

Matrix hierzu: $-L_h$

$\boxed{d=2}$ $\quad L_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} D & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & D \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(iv) Gewöhnliche Dgl. höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot y, \ddot y, \ldots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(0) = y^{0,i} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

n-te Abl.

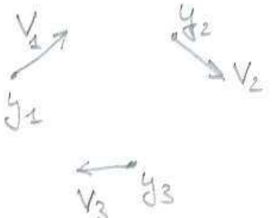
Transformation: $\quad x = \begin{pmatrix} y \\ \dot y \\ \ddot y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ löst $\dot x = F(t,x)$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \qquad F(t,x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \end{pmatrix}$$

(v) n-Körperproblem

y_i Massepunkte mit Massen m_i $(i = 1, \ldots N)$

$$m_i \ddot{y}_i = F_i\left((m_i, y_i)_{i=1,\ldots N} \right)$$
$$= \nabla_{y_i} \Phi \quad \text{Potential}$$



$$\Phi = -\gamma \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\|y_i - y_j\|} \qquad (\gamma \text{ Gravitationskonstante})$$

Anfangswerte: $y_i(0) = y_{0,i}$, $\dot{y}_i(0) = v_{0,i}$

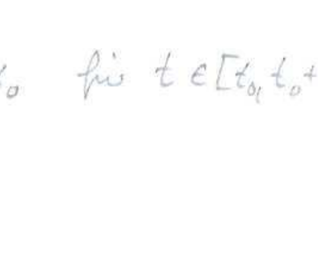
1.2 Satz (Existenzsatz von Peano)

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^d)$, $(t_0, x_0) \in D$, dann existiert $\delta \in \mathbb{R}^+$ und $x \in C^1([t_0, t_0+\delta), \mathbb{R}^d)$, so dass $(t, x(t))_{t \in [t_0, t_0+\delta)} \subset D$ und

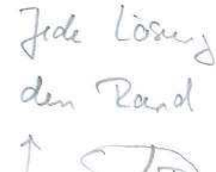
$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad , \; x(0) = x_0 \quad \text{für } t \in [t_0, t_0+\delta)$$

Bew (Analysis)

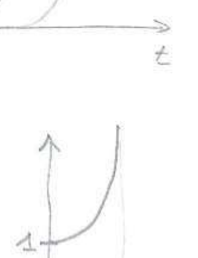
Bem
- keine Eindt., Bsp: $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$
  $$x(t) = \frac{1}{4}(t - \underset{\mathbb{R}_0^+}{\underset{\Uparrow}{t^*}})^2$$



- Jede Lösung ist bis auf den Rand von D fortsetzbar



$\boxed{\text{Bsp:}}$ $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$ $\qquad x(t) = \frac{1}{1-t}$



1.3 Satz (Picard-Lindelöf) $D = [0, T] \times \Omega$,
Vor. wie oben, F Lipschitzstetig in x, dann existiert eine eindeutige Lösung $x \in C^1$ bis zum Rand von D.

Bew: (i) Betrachte $x(t) = x^0 + \int_0^t F(s, x(s))\, ds$

wähle δ klein, dann ist

$\Phi : C^0([t_0, t_0+\delta], \mathbb{R}^d) \to C^0([t_0, t_0+\delta], \mathbb{R}^d)$ mit

$\Phi(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))\, ds$ eine kontrahierende Abbildung auf $(C^0([t_0, t_0+\delta), \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$, denn

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty = \|t \mapsto \int_0^t F(s, x(t)) - F(s, y(s))\, ds\|_\infty$$

$$= \sup_{t \in [t_0, t_0+\delta]} \|\text{—}\| \leq \underbrace{C_{Lip}\, \delta}_{=: q < 1 \text{ falls } \delta \text{ klein}} \sup_{s \in [t_0, t_0+\delta]} \|x(s) - y(s)\|_\infty$$

Banachscher Fixpunktsatz $\Longrightarrow$

$\exists!$ Fixpunkt $x : [t_0, t_0+\delta] \to \Omega$ mit

$x(t) = x^0 + \int_0^t F(s, x(s))\, ds \implies x \in C^1$

(ii) Fortsetzung: $\dot{\tilde{x}}(t) = F(t+\delta, \tilde{x})$, $\tilde{x}(t_0) = x(t_0+\delta)$ $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \tilde{\delta},\ \tilde{x} : [t_0, t_0+\tilde{\delta}] \to \Omega$ Lösung

$x|_{[t_0+\delta, t_0+\delta+\tilde{\delta}]}(t) := \tilde{x}(t-\delta) \Rightarrow x$ fortsetzbar

□

1.4 Def (Phasenfluß)

Vor. wie oben, dann heißt die Abbildung $\Phi_{\cdot,\cdot}(\cdot)$ mit

$\Phi_{t,t_0}(x^0) := x(t, t_0, x^0)$ (Evolution)

mit $\partial_t x = F(t,x)$ und $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$

Flußfunktion oder Phasenfluß (D Phasenraum)

1.5. Lemma

- $\Phi_{t,t_1} \circ \Phi_{t_1,t_0} = \Phi_{t,t_0}$
- $\Phi_{t_0,t_0} = \mathbb{1}$, $\frac{d}{d\tau} \Phi_{t+\tau,t}\, x \Big|_{\tau=0} = F(t,x)$
- Falls F nicht von t abhängt ($\dot{x} = F(x)$), dann gilt $\Phi_{t+s,t} = \Phi_{s,0}$ und man schreibt einfach Φ_t (autonome Dgl.)

Bew: (✓)

insbesondere: $x(t+\cdot, t, x^0)$, $x(\cdot, 0, x^0)$ lösen das gl. Anfangswertpb. $\dot{x} = F(x)$, $x(0) = x^0$ □

1.6. Bsp (geschlossene Lösung)

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{d,d},\ b(t), x(t) \in \mathbb{R}^d,$$
$$x(0) = x^0 \qquad x_0 \in \mathbb{R}^d,\ \sup_t \|A(t)\| \le C$$

Methode der Variation der Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A(t)\,\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) &= x^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}\, x^0$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A(t)\,\tilde{x}(t) + b(t) \\ \tilde{x}(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ansatz: $\tilde{x}(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}\, y(t)$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\,\tilde{x}(t) + e^{\int_0^t A(s)\,ds}\, \dot{y}(t) \overset{!}{=} A(t)\,\tilde{x}(t) + b(t)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = e^{-\int_0^t A(s)\,ds}\, b(t), \quad y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\int_0^\tau A(s)\,ds}\, b(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}\, x^0 + \int_0^t e^{\int_\tau^t A(s)\,ds}\, b(\tau)\,d\tau$$

Bem: Selbst geschlossene Lösungen können schwer zu berechnen sein!

Bsp: Lösung der Wärmeleitung (siehe 1.1.(iii))

$\boxed{f_e = 0}$ $\quad u_e(t) = e^{\int_0^t -L_e \, ds} u_{e,0} = e^{-L_e t} u_e^0$ (Dämpfung)

$\boxed{\text{allgemein}}$ $\quad u_e(t) = e^{-tL_e} u_e^0 + \int_0^t e^{-(t-s)L_e} f_e(s) \, ds$

L_e hat nur positive Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_N$ (symmetrisch)

1.7. Kondition gewöhnlicher Dgl'n

$\boxed{\text{Pb}}$ $\quad (\phi_{t,t_0}, x^0)$, $\|\cdot\|_\infty$ als Norm

Frage: Wie pflanzen sich Störungen fort?

Betrachte $x^0 \longmapsto \phi_{t,t_0}(x^0)$

$$K_{abs} = \|(D_x \Phi_{t,t_0})(x^0)\|_\infty$$

$$\underbrace{(D_x \phi_{t,t_0})(x_0)\, \delta x}_{=:\, \delta x(t)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \Big[\underbrace{\phi_{t,t_0}(x^0 + s\,\delta x)}_{x_s(t)} - \underbrace{\phi_{t,t_0}(x^0)}_{x(t)} \Big]$$

mit $x_s(t) = x_s(0) + \int_{t_0}^t F(\xi, x_s(\xi)) \, d\xi$, $\quad x_s(0) = x^0 + s\,\delta x$

$$\overset{\partial_s \cdot|_{s=0}}{\Longrightarrow} \quad \delta x(t) = \delta x + \int_{t_0}^t D_x F(\xi, x(\xi))\, \delta x(\xi) \, d\xi$$

$$\boxed{x_s(t) \approx x(t) + s\, \delta x(t)}$$

$$\dot{\delta x}(t) = D_x F(t, x(t))\, \delta x(t)$$

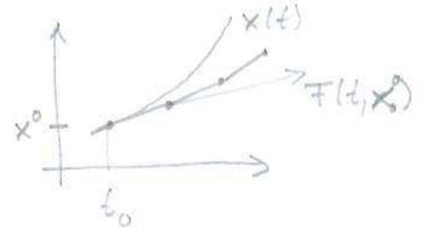
$$\delta x(t_0) = \delta x$$

$$\Rightarrow K_{abs}(t) = \sup_{\|\delta x\|_\infty} \|\delta x(t)\|_\infty$$

Bsp $\quad \dot{x} = \lambda x \;\Rightarrow\; \dot{\delta x} = \lambda\, \delta x \;\Rightarrow\; K_{abs} = e^{\lambda(t-t_0)}$

Betrachten wir nun numerische Verfahren:

1.8. Das Eulersche Polygonzug-Verfahren



$$\Phi_{t,t_0}\, x^0 \approx \underbrace{x^0 + (t-t_0)\, F(t_0, x^0)}_{=:\ \hat{\Phi}_{t,t_0}\, x^0}$$ numerische Fluss

Iteration $\quad$ Sei $t_0 < t_1 < t_2 < \dots\ t_n = T$, dann berechne

$$x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i)\, F(t_i, x^i) \quad \text{mit } x_0 = x^0$$

$\tau_i = t_{i+1} - t_i$ Schrittweite

andere Schreibweise:
$$\boxed{\begin{aligned} x_{i+1} &= \hat{\Phi}_{t_{i+1}, t_i}\, x_i \\ x_0 &= x^0 \end{aligned}}$$ (diskrete Evolution)

welchen Fehler machen wir in einem Schritt:

$$\Big\| \Phi_{t_i+\tau_i, t_i}\, \underset{\uparrow}{x_i} - \hat{\Phi}_{t_i+\tau_i, t_i}\, \underset{\uparrow}{x_i} \Big\| =$$

gleiche Anfangsdaten

$$\big\| x(t_i+\tau_i, t_i, x_i) - (x_i + \tau_i F(t_i, x_i)) \big\|$$

$$= \Big\| \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} \dot{x}(s)\, ds + \tau_i F(t_i, x_i) \Big\| = \Big\| \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, x(s))\, ds - \underbrace{\tau F(t_i, x_i)}_{\substack{\text{Quadraturformel} \\ \text{(exakt auf } \mathcal{P}_0)}}}_{\text{Quadraturfehler!}} \Big\|$$

$$\overset{(*)}{\le} C_1\, \tau_i^2 \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} \Big\| \frac{d}{ds} F(s, x(s)) \Big\|$$

$\dot{x}(s) = F(s, x(s))$

$$\le C_1\, \tau_i^2 \max_{(s,x) \in D} \big\| \partial_t F(s,x) + \partial_x F(s,x)\, F(s,x) \big\|$$

ad (*): $$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,x(s))\,ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(F(t_i,x_i) + \int_{t_i}^{s} \frac{d}{d\tau}F(\tau,x(\tau))\,d\tau\Big)\,ds$$

$\boxed{\text{mit: } x(s) = x(s,t_i,x_i)}$

$$= \tau_i\, F(t_i,x_i) + \tau_i \max_{t_i\le s\le t_{i+1}} \frac{d}{ds}F(s,x(s))\,\tau_i$$

1.9. Def Eine stetige Abb. $\hat{\Phi}$, die einem $(t,x)\in D$ für s hinreichend klein ein $\hat{\Phi}_{t+s,t}\,x$ zuordnet mit $(t+s,\hat{\Phi}_{t+s,t}\,x)\in D$ heißt diskrete Evolution.

1.10. Def (Konsistenz)

Sei $(t,x)\in D$, dann heißt

$$\epsilon(t,x,\tau) = \Phi_{t+\tau,t}\,x - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\,x$$

Konsistenzfehler der diskreten Evolution $\hat{\Phi}$.

$\hat{\Phi}$ heißt konsistent, falls $\hat{\Phi}_{t,t} = \mathbb{1}$

$$\frac{d}{d\tau}\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\,x\Big|_{\tau=0} = F(t,x)\ \ \forall_{(t,x)\in D}$$

$\hat{\Phi}$ heißt konsistent von der Ordnung p, falls

$$\epsilon(t,x,\tau) = O(\tau^{p+1})\quad \forall_{(t,x)\in K\subset\subset D}$$

1.11. Lemma $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\,x$ sei differenzierbar in τ, $\hat{\Phi}_{t,t}=\mathbb{1}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\frac{d}{d\tau}\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\,x\Big|_{\tau=0} = F(t,x)$ (Konsistenz)

(ii) $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\,x = x+\tau\,\hat{\varphi}(t,x,\tau)$ wobei $\hat{\varphi}$ stetig und $\hat{\varphi}(t,x,0) = F(t,x)$

(iii) $\epsilon(t,x,\tau) = o(\tau)$

Bew $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

$$\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x = x + \overbrace{\left(\hat{\Phi}_{t+\tau\cdot 1,t} - \hat{\Phi}_{t+\tau\cdot 0,t}\right)}^{=1}(x)$$

$$= x + \tau \underbrace{\int_0^1 \partial_1 \hat{\Phi}_{t+\tau s,t}\, x \, ds}_{=: \hat{\varphi}(t,x,\tau)}$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(t,x,\tau) = \frac{\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x - x}{\tau} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \frac{d}{d\tau} \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x \Big|_{\tau=0} = F(t,x)$$

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}$ stetig und $\hat{\varphi}(t,x,0) = F(t,x)$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$

$$\frac{\epsilon(t,x,\tau)}{\tau} = \frac{\Phi_{t+\tau,t}\, x - x + x - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x}{\tau}$$

$$\xrightarrow[\tau \to 0]{} F(t,x) - \hat{\varphi}(t,x,0) = 0$$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$

$$0 = \lim_{\tau \to 0} \frac{\epsilon(t,x,\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \left(\Phi_{t+\tau,t}\, x - \underset{\hat{\Phi}_{t,t} x}{\underset{\parallel}{x}} + x - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x \right)$$

$$= F(t,x) - \frac{d}{d\tau} \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x \Big|_{\tau=0} \qquad \square$$

1.12 **Bem** Wählt man $\hat{\varphi}(t,x,\tau) = F(t,x)$, so erhält man das Eulersche Polygonzug-Verfahren.

1.13 **Def** (**Konvergenz**)

Eine diskrete Evolution $\hat{\Phi}$ heißt konvergent gegen eine kont. Evolution Φ auf $[t_0, T]$, falls für eine Zerlegung von $[t_0, T]$ in Intervalle $[t_i, t_{i+1})$ mit $\tau_i = t_{i+1} - t_i < \tau$ und kont. Lösung x sowie diskrete Lösung $(x_i)_{i=0,\dots,n(\tau)}$ mit $x_{i+1} = \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i} x_i$ gilt

$$\|\epsilon\|_\infty := \max_{i=0,\dots,n(\tau)} |x_i - x(t_i)| \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

Die Konvergenz ist von der Ordnung $p>0$, falls

$$\|E\|_\infty = O(\tau^p)$$

Ziel: Konsistenz der Ordnung p + Stabilität der diskreten Evolution $\Rightarrow$ Konvergenz der Ordnung p

$\boxed{\hat\varphi \text{ Lipschitz stetig bzgl. } x}$

1.14 Satz (Konvergenzsatz)
Vor. wie in 1.3. (Picard Lindelöf), sei $x \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^d)$ Lösung des AWP $\dot x = F(t,x)$, $x(0)=x^0$, eine diskrete Evolution $\hat\Phi$ sei konsistent von der Ordnung $p \geq 1$, $\hat\varphi$ sei Lipschitzstetig bzgl. x in einer Umgebung der Lösung, dann gibt es $\tau>0$, so dass für alle diskreten Evolutionen mit $\tau_i \leq \tau$ die Folgen $(x_i)_{i=0,\dots,n(\tau)}$ mit $x_{i+1} = \hat\Phi_{t_i+\tau_i,t_i} x_i$ von der Ordnung p konvergieren für $\tau \to 0$.

Bem
- ~~Aber~~ für τ klein genug bleibt man im Definitionsbereich D von $F(\cdot,\cdot)$.
- Es genügt Konsistenz auf kompakten Umgebungen der Lösung
- $\hat\varphi$ Lipschitz-stetig bzgl. x mit Konstante C_{Lip} $\leftrightarrow$ Stabilität

Bew

$$\begin{aligned}
\epsilon_{i+1} &:= x(t_{i+1}) - x_{i+1} \\
&= \Phi_{t_{i+1},t_i} x(t_i) - \hat\Phi_{t_{i+1},t_i} x_i \\
&= \underbrace{\Phi_{t_{i+1},t_i} x(t_i) - \hat\Phi_{t_{i+1},t_i} x(t_i)}_{=\epsilon(t_i,x(t_i),\tau_i) \text{ Konsistenzfehler}} \\
&\quad + \underbrace{\hat\Phi_{t_{i+1},t_i} x(t_i) - \hat\Phi_{t_{i+1},t_i} x_i}_{=:\hat\epsilon_i}
\end{aligned}$$

Fortpflanzung des ϵ_i-Fehlers mit der diskreten Evolution

$$|\hat{\epsilon}_i| = |x(t_i) - x_i + \tau_i(\hat{\varphi}(t_i, x(t_i), \tau_i) - \hat{\varphi}(t_i, x_i, \tau_i))|$$
$$\leq (1 + \tau_i C_{Lip})|\epsilon_i|$$

$\boxed{\text{falls } x_i \text{ nahe an } x(t_i)}$

$$\Rightarrow |\epsilon_{i+1}| \leq C\tau_i^{p+1} + (1 + C_{Lip}\tau_i)|\epsilon_i|$$

Beh: $|\epsilon_i| \leq \tau^p \frac{C}{C_{Lip}}\left(e^{C_{Lip}(t_i - t_0)} - 1\right) \quad \forall i = 0, \ldots, n$

hierzu: $\boxed{\text{Induktion}}$ $\boxed{i=0}$ $\epsilon_0 = 0 \Rightarrow \hat{\epsilon}_0 = 0 \Rightarrow$

(C universelle Konstante) $\quad |\epsilon_0| = 0 \leq \tau^p \frac{C}{C_{Lip}}(e^0 - 1) = 0$ (✓)

$\boxed{i \rightsquigarrow i+1}$ $$|\epsilon_{i+1}| \leq \tau^p\left[C\tau_i + (1 + C_{Lip}\tau_i)\frac{C}{C_{Lip}}\left(e^{C_{Lip}(t_i - t_0)} - 1\right)\right]$$
$$\leq \frac{C}{C_{Lip}}\tau^p\left[\underbrace{(1 + C_{Lip}\tau_i)}_{\leq e^{C_{Lip}\tau_i}} e^{C_{Lip}(t_i - t_0)} - 1\right]$$
$$\leq \frac{C}{C_{Lip}}\tau^p\left[e^{C_{Lip}(\tau_{i+1} - t_0)} - 1\right] \quad (✓)$$

Damit ist insbesondere gezeigt, dass für τ klein (t_i, x_i) in einer Umgebung der kontinuierlichen Lösung liegt!

□

1.15 Bsp (explizite Eulerverfahren)

Falls $F \in C^1$, so ist das expl. Eulerverfahren konvergent von der Ordnung 1.

hierzu: $$\left.\begin{array}{l}\hat{\varphi}(t, x, \tau) = F(t, x) \Rightarrow \text{Lipschitz-stetig} \\ \epsilon(t, x, \tau) \overset{(1.8.)}{=} O(\tau^2)\end{array}\right\} \epsilon_i = O(\tau)$$

<u>Bem</u>: $\epsilon_n \underset{T=t_n}{\le} \tau^p \frac{C_1}{C_{Lip}} \left(e^{C_{Lip}(T-t_0)} - 1 \right)$

kritische Konstante für T groß!

1.16 Das Cauchy-Euler-Verfahren

Nachteil des Euler-Verfahrens: $\underbrace{\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau}}_{} = F(t_i, x_i) \approx \dot{x}(t_i)$

nur 1. Ordnung ← Vorwärtsdifferenzenquotient

<u>besser</u>: Ansatz mit zentralen Differenzenquotienten

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \tau_i F\left(t_i + \tfrac{\tau_i}{2}, x_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + \tfrac{\tau_i}{2} F(t_i, x_i) \end{aligned}}$$

Approximation von $x(t_i + \frac{\tau}{2})$

(Cauchy-Euler-Verfahren)

1.17. <u>Satz</u> Falls $F \in C^2$, so ist das Cauchy-Euler-Verfahren konvergent von der Ordnung 2:

$$|x(t_i) - x_i| \underset{i=0,\dots,n}{=} O(\tau^2), \quad \tau = \max_{i=0,\dots,n-1} \tau_i$$

<u>Bew</u>: $\Phi_{t+\tau,t}(x(t)) = x(t) + \tau \underbrace{\dot{x}(t)}_{F(t,x(t))} + \frac{\tau^2}{2} \underbrace{\ddot{x}(t)}_{\frac{d}{dt}F(t,x(t))} + O(\tau^3)$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}F(t,x(t))}_{\partial_t F(t,x(t)) + D_x F(t,x(t)) F(t,x(t))}$$

$$= x(t) + \tau F(t,x(t)) + \frac{\tau^2}{2}\Big(\partial_t F(t,x(t)) + D_x F(t,x(t)) F(t,x(t))\Big) + O(\tau^3)$$

<u>Entwickle nun $F(t+s, x+sF(t,x))$ bezgl. s um 0</u>:

$$F(t+s, x+sF(t,x)) = F(t,x) + s\Big(\partial_t F(t,x) + D_x F(t,x) F(t,x)\Big) + O(s^2)$$

- diskreter Fluß: $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(x) = x + \tau F\left(t+\frac{\tau}{2}, x+\frac{\tau}{2}F(t,x)\right)$

$$\underset{s=\frac{\tau}{2}}{\overset{\text{T}}{=}} x + \tau\left[F(t,x) + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t F(t,x) + D_x F(t,x)F(t,x)\right) + O(\tau^2)\right]$$

$\Rightarrow \quad \| \Phi_{t+\tau,t}(x) - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}(x) \| = O(\tau^3)$

$\Rightarrow$ Konsistenz 2ter Ordnung

$$\underbrace{\frac{\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(x) - x}{\tau}}_{\hat{\varphi}(t,x,\tau)} = F\left(t+\frac{\tau}{2}, x+\frac{\tau}{2}F(t,x)\right)$$

$\hat{\varphi}(t,x,\tau)$ Lipschitz $\Leftarrow$ F Lipschitz

$\overset{1.14}{\Longrightarrow}$ Beh $\square$

Betrachten wir nun die Kondition der diskreten Evolution:

$$\hat{K}_\tau(T) := \sup_{\substack{\tilde{x}_0 \neq x_0 \\ \|x_0 - \tilde{x}_0\| \ll 1}} \frac{\|x_n - \tilde{x}_n\|}{\|x_0 - \tilde{x}_0\|} \qquad \begin{matrix} x_n \\ \tilde{x}_n \end{matrix} \text{ Lösung zu AW } \begin{matrix} x_0 \\ \tilde{x}_0 \end{matrix}$$

Konvergenzsatz: $\quad \hat{K}_\tau \xrightarrow[\tau \to 0]{} K$ (kont. Kondition des AWP)

Falls $\hat{K}_\tau \gg K$ (noch zu große Zeitschritte), so sprechen wir von einem steifen Problem
(kleine Zeitschritte $\to$ großer Aufwand)

1.18 Bsp (i) $\quad \dot{x} = \lambda x \quad x(0) = 1 \quad (x(t) = e^{\lambda t})$

$$K(T) = e^{\lambda T}$$

diskret: $\quad x_{i+1} = (1 + \tau_i \lambda) x_i \Rightarrow$

$$x_{i+1} + \delta x_{i+1} = (1 + \tau_i \lambda)(x_i + \delta x_i), \; \delta x_0 = \delta x \Rightarrow$$

$$\hat{K}_\tau(T) = \prod_{j=0}^{n-1} |1 + \tau_j \lambda|$$

$\boxed{\lambda \geq 0}$ $\quad |1 + \tau\lambda| \leq e^{\tau\lambda} \Rightarrow \hat{K}_\tau(T) \leq e^{\lambda T} = K(T)$

$\Rightarrow$ nicht steif

$\boxed{\lambda < 0}$ nehmen wir eine konstante Schrittweite an:

$\hat{K}_\tau = |1 - \tau|\lambda||^n$

$\boxed{\text{falls } \tau < \frac{2}{|\lambda|}}$ $(\Leftrightarrow |1 - \tau|\lambda|| < 1)$ folgt

$\max\limits_{i=0,\ldots,n} \hat{K}_\tau(t_i) < 1 = \max\limits_{t \in [0,T]} K(T)$

$\boxed{\text{falls } \tau > \frac{2}{|\lambda|}}$ $\quad \max\limits_{i=0,\ldots,n} \hat{K}_\tau(t_i) = |1 - \tau|\lambda||^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow$ steifes Problem

(ii) Betrachte konkret: $\quad \dot{u}_h = -L_h u_h \quad u_h(0) = u_h^0$
(Wärmeleitung)

L_h EW $\lambda_{h,k}$ zu EV $v_{h,k}$

$$u_h^0 = \sum_{k=1}^{N} u_{h,k}^0 v_{h,k} \Rightarrow u_h(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda_{h,k} t} v_{h,k} u_{h,k}^0$$

D.h. das Eulerverfahren führt auf ein steifes Pb.

falls: $\quad \tau \geq \frac{2}{|\lambda_N|} \quad \lambda_n = O(h^{-2})$

$\Rightarrow$ Schrittweitenbeschränkung: $\tau \leq \frac{2}{|\lambda_N|} = O(h^2)$

sonst: Entstehung von Oszillationen

$\Leftrightarrow u_{h,k}$ $k \gg 1$ werden verstärkt!

Wie konstruiert man Verfahren höherer Ordnung:

$$\epsilon(t,x,\tau) = \Phi_{t+\tau,t}\, x - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x \overset{!}{=} O(\tau^{p+1})$$

$$= \underbrace{(\Phi_{t+\tau,t}\, x - x)}_{\substack{\text{Taylorentwicklung} \\ \text{in } \tau}} + \underbrace{(x - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x)}_{\substack{\tau\hat{\varphi}(t,x,\tau) \\ \text{zu wählen}}} \quad (\text{vgl. } 1.17)$$

$$\Phi_{t+\tau,t}\, x - x = \tau\, \partial_\tau \Phi_{t+\tau,t}\, x \big|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!}\partial_\tau^2 \Phi_{t+\tau,t}\, x\big|_{\tau=0} + \ldots$$
$$\frac{\tau^p}{p!}\partial_\tau^p \Phi_{t+\tau,t}\, x\big|_{\tau=0} + O(\tau^{p+1})$$

hierzu: $\partial_\tau \Phi_{t+\tau,t}\, x = \partial_\tau x(t+\tau,t,x)\big|_{\tau=0} = F(t,x)$

$$\partial_\tau^2 \Phi_{t+\tau,t}\, x = \partial_\tau^2 x(t+\tau,t,x)\big|_{\tau=0} = \partial_\tau F(t+\tau, x(t+\tau))$$
$$\underset{\text{s.o.}}{=} \partial_t F(t,x) + D_x F(t,x)\, F(t,x)$$

$$\ldots \quad \partial_\tau^k \Phi_{t+\tau,t}\, x = \underbrace{\Lambda^k[F]}(t,x)$$

Differentialoperator auf F von der Ordnung $(k-1)$

$\boxed{1. \text{ Ansatz}}$ Wähle

$$\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x = x + \sum_{k=1}^{p} \frac{\tau^k}{k!}\Lambda^k[F](t,x) \quad (\text{Taylor-Verfahren})$$

Bsp: $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x = x + \tau F(t,x) + \frac{\tau^2}{2}\left(\partial_t F(t,x) + D_x F(t,x) F(t,x)\right)$

ist konvergent von der Ordnung 2, falls $F \in C^2$

hierzu: Konsistenz (✓), Stabilität: $F \in C^2 \Rightarrow \hat{\varphi}$ Lipschitz

Nachteil: Ableitungsauswertungen

<u>Ziel</u>: Verfahren höherer Ordnung nur mit $F(\cdot,\cdot)$-Auswertungen?

$$\Phi_{t+\tau,t}\, x = x + \int_0^\tau F(t+\xi, \Phi_{t+\xi,t}\, x)\, d\xi$$

(*) $$\hat\Phi_{t+\tau,t}\, x = x + \underbrace{\tau \sum_{i=1}^{s} b_i\, F(t+\xi_i, \Phi_{t+\xi_i,t}\, x)}_{\text{Quadraturformel}} + O(\tau^{p+1})$$

dabei ist $\Phi_{t+\xi_i,t}$ zu bestimmen:
Falls F Lipschitz, so genügt es dies von $(p-1)$-ter Ordnung zu approximieren:

(**) $$\Phi_{t+\xi_i,t}\, x = \hat{\hat\Phi}_{t+\xi_i,t} + O(\tau^p)$$

$$\Rightarrow \quad \hat\Phi_{t+\tau,t}\, x = x + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i\, F(t+\xi_i, \hat{\hat\Phi}_{t+\xi_i,t}\, x) \underset{(*)+(**)}{=} \Phi_{t+\tau,t}\, x + O(\tau^{p+1})$$

vgl. Cauchy Euler-Verfahren:

$$\hat{\hat\Phi}_{t+\xi,t}\, x = x + \xi F(t,x)$$
$$\hat\Phi_{t+\tau,t}\, x = x + \tau\, F(x+\tfrac{\tau}{2}, x + \tfrac{\tau}{2} F(t,x))$$

<u>Dieses Vorgehen kann man iterieren</u>:

1.19 <u>Def</u> (Runge-Kutta-Verfahren)

Ein Schema

$$k_i = F(t + c_i \tau, x + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \quad i = 1, \dots, s$$

$$\hat\Phi_{t+\tau,t}\, x = x + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i\, k_i$$

das konsistent ist von der Ordnung p heißt Runge-Kutta-Verfahren p-ter Ordnung (und s-ter Stufe)

<u>Notation</u>:

$$\begin{array}{c|ccccc} c_1 & 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & 0 & & & \\ | & a_{31} & a_{32} & & & \\ & | & & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & — & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & — & & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

<u>Euler-Verfahren</u>: $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ <u>Cauchy-Euler-Verf.</u>: $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$

1.20 <u>Lemma</u> Ein Runge-Kutta-Schema ist konsistent für alle $F \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$, falls $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$

<u>Bew</u> $$\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x = x + \tau \underbrace{\sum_{i=1}^{s} b_i\, F(t + c_i\tau, \xi_i)}_{\hat{\varphi}(t,x,\tau)} \qquad \xi_i = x + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$$

$$\hat{\varphi}(t,x,0) \underset{\xi_i = x}{=} \sum_{i=1}^{s} b_i\, F(t,x) = F(t,x) \overset{1.11.(ii)}{\Longrightarrow} \text{Konsistenz}$$

□

1.21 <u>Lemma</u> Falls ein R-K-Verf. s-ter Stufe die Konsistenz-Ordnung p besitzt für alle $F \in C^\infty(D, \mathbb{R}^d)$, so gilt $p \le s$.

<u>Bew</u> Betrachte $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$

$$x(\tau) = \Phi_{\tau,0}\, 1 = e^{\tau} = 1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + — \frac{\tau^p}{p!} + O(\tau^{p+1})$$

$$k_i(\tau) = 1 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j(\tau), \quad k_1(\tau) = 1$$

$$\Rightarrow k_i(\cdot) \in \mathcal{P}_{i-1}$$

$$\left| \Phi_{\tau,0}\, 1 - \hat{\Phi}_{\tau,0}\, 1 \right| = \left| e^{\tau} - \underbrace{\tau \underbrace{\sum_{i=1}^{s} b_i k_i}_{\in \mathcal{P}_{s-1}}}_{\in \mathcal{P}_s} \right| \ge O(\tau^{s+1})$$

$\Rightarrow p \le s$ □

Reihenentw. beginnt mit $\alpha \tau^r$ $(r \le s+1)$ für kleine τ $\Rightarrow$ geht nicht besser für alle τ, da dieser Term domi

1.22 <u>Bsp</u> (Runge-Kutta-Verfahren)

<u>3-ter Ordnung:</u>

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

<u>4-ter Ordnung:</u>

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

<u>Bem:</u> <u>Methode zum Konsistenzordnungsnachweis:</u>

1. Entwickle $\Phi_{t+\tau,t}$ in τ an der Stelle t (von Ordnung p)
2. —"— $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}$ —"—
3. Koeff. vgl.

(vgl. Cauchy-Eulerverfahren)

1.23 <u>Satz</u>

Ein R-K.-Verfahren p-ter Ordnung für $\dot{x} = F(t,x)$ mit F Lipschitz konvergiert von der Ordnung p.

<u>Bew</u> z.z. $\hat{\varphi}$ ist Lipschitz-stetig in x

$$\hat{\varphi}(t,x,\tau) = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(\tau,x)$$

$$\text{mit } k_i(x) = F\Big(t+c_i\tau,\, x+\tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_i(\tau,x)\Big)$$

F Lipschitz $\Rightarrow k_1$ Lipschitz $\underset{F \text{ Lipschitz}}{\Rightarrow} k_2$ Lipschitz $\ldots \Rightarrow k_s$ Lipschitz

daraus folgt dann $\hat{\varphi}$ Lipschitz

□

Schrittweitensteuerung:

$\boxed{\text{Aufgabe}}$ Finde n, $\{\tau_i\}_{i \le n-1}$ so dass $|x(T)-x_n| < \epsilon$

$t_{i+1} = t_i + \tau_i$, $t_n = T$

und n möglichst klein

d.h. wir suchen eine adaptive Schrittweitensteuerung

bisher: äquidistantes Gitter in der Zeit

$$\tau_i = \tau = \frac{T}{n}$$

$$\epsilon_{i+1} = x(t_{i+1}) - x_{i+1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vgl. Bew. 1.14}}}{=} \underbrace{\left(\Phi_{t_{i+1},t_i} x(t_i) - \Phi_{t_{i+1},t_i} x_i\right)}_{\text{Fehlerpropagation}} + \underbrace{\left(\Phi_{t_{i+1},t_i} x_i - \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i} x_i\right)}_{\text{Konsistenzfehler}}$$

Beschränkung auf den Konsistenzfehler:

$$E_{i+1} = \| \Phi_{t_i+\tau_i,t_i} x_i - \hat{\Phi}_{t_i+\tau,t_i} x_i \|$$

Ziel: $E_{i+1} \le TOL$ (genauer $\boxed{E_{i+1} \simeq TOL \cdot \rho}$ $\rho \in (0,1)$

auch nicht überschätzter Fehler

Bem: Falls $TOL \approx TOL^* \tau_i \Rightarrow \|\epsilon_{i+1}\| \le \frac{TOL^*}{C_{Lip}} \left(e^{C_{Lip}(t_i - t_0)} - 1\right)$

(Bew. wie in 1.14, C_{Lip} bzgl $x \mapsto \Phi_{t_{i+1},t_i} x$)

aber wenig hilfreich da C_{Lip} sehr große Abschätzung liefert!

Vor: • Verfahren der Ordnung p

• Sei $\hat{E}_{i+1}$ eine Approximation von E_{i+1}

mit $\hat{E}_{i+1} = E_{i+1} + O(\tau_i^{p+2})$

$\Rightarrow$ Falls F glatt (Taylorentw.) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} E_{i+1} = c(t_i,x_i)\,\tau_i^{p+1} + O(\tau_i^{p+2}) \Rightarrow \\ \hat{E}_{i+1} = c(t_i,x_i)\,\tau_i^{p+1} + O(\tau_i^{p+2}) \end{array}\right.$

nun soll: (s.o.)

$$\boxed{\varrho\, TOL \simeq c(t_i, x_i)(\tau_i^*)^{p+1} \quad \text{mit } \tau_i^* \text{ optimale Schrittweite}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\varrho\, TOL}{\hat{E}_{i+1}} \simeq \frac{c(t_i, x_i)(\tau_i^*)^{p+1}}{c(t_i, x_i)(\tau_i)^{p+1} + O(\tau_i^{p+2})}$$

$$\overset{\boxed{c(t_i, x_i) \neq 0}}{=} \left(\frac{\tau_i^*}{\tau_i}\right)^{p+1} \left(\underbrace{\frac{c(t_i, x_i)}{c(t_i, x_i) + O(\tau_i)}}_{\xrightarrow[\tau_i \to 0]{} 1}\right)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\tau_i^* \simeq \sqrt[p+1]{\frac{\varrho\, TOL}{\hat{E}_{i+1}}}\, \tau_i}$$

Ergänzend verlangen wir: $\tau_i^* \leq \tau_{max}$

$\tau_i^* \leq c_1 \tau_i$ (Beschränkung der Schrittweitenvergrößerung)

wie berechnet man $\hat{E}_{i+1}$:

Betrachte zwei Runge-Kutta-Verfahren RK(p) und RK(p+1) der Ordnung p und p+1 mit Flüssen $\hat{\phi}^p$, $\hat{\phi}^{p+1}$ und definiere

$$\hat{E}_{i+1} = \| \hat{\phi}^{p+1}_{t_i+\tau_i, t_i} x_i - \hat{\phi}^{p}_{t_i+\tau_i, t_i} x_i \|$$

wähle glatte Norm (z.B. Eukl. Norm)

1.24 Algorithmus

τ Anfangsschrittweite, x_0 Anfangswert, t_0 Anfangszeit

```
t = t_0; x = x_0;
while (t < T) {
  s = t + τ;  y_1 = φ̂^p_{s,t} x;  y_2 = φ̂^{p+1}_{s,t} x;
  Ê = ‖y_2 - y_1‖;  τ = min{ c_1 τ, τ_max, (ϱ TOL / Ê)^{1/(p+1)} τ };
  if (Ê ≤ TOL) { t = s; x = y_2; }
}
```

„besserer Wert"

Insbesondere geeignet sind R.-K.-Verf. bei denen für RK(p+1) viel von RK(p) wiederverwendet werden kann (eingebettete Verfahren)!

1.25. Bsp RK(5,4)

0	0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		
1	0	0	1	0	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1 / 4. Ord.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
5. Ord.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$

$$k_1 = F(t,x)$$
$$k_2 = F\left(t+\frac{\tau}{2}, x+\frac{\tau}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = F\left(t+\frac{\tau}{2}, x+\frac{\tau}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = F(t+\tau, x+\tau k_3)$$
$$k_5 = F\Big(t+\tau, \underbrace{x+\frac{k_1\tau}{6}+\frac{k_2\tau}{3}+\frac{k_3\tau}{3}+\frac{k_4\tau}{6}}\Big)$$
$$x+\frac{\tau}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) = \hat{\phi}^4_{t+\tau,t}\,x$$
$$\hat{\phi}^5_{t+\tau,t}\,x = x+\underbrace{\frac{\tau}{6}\left(k_1+2(k_2+k_3)+k_5\right)}$$

Mehraufwand

Nun betrachten wir implizite Verfahren:

(Wh) $K_\tau(t) >> K(t)$ steife Probleme

Bsp: $\dot{x} = Ax$ $\min \operatorname{Re} \lambda(A) < 0$

λ EW zu A

konkret: $A = -L_h$ (L_h Diskretisierung von $-\Delta_h$)

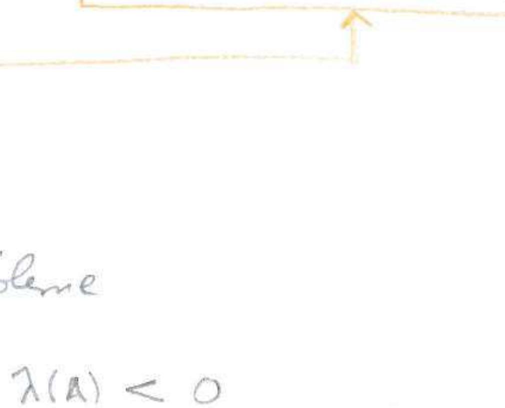
$\min \operatorname{Re} \lambda(-L_h) = -O(h^{-2})$

$\boxed{\text{Idee}}$ $\dot{x} = \lambda x$ $(\lambda < 0)$

$$\phi_{t+\tau,t}\,x = e^{\lambda\tau}x$$

$\boxed{\text{Euler (explizit)}}$ $\hat{\phi}^{expl}_{t+\tau,t} = (1+\lambda\tau)x$

$\boxed{\text{Euler (implizit)}}$ $\hat{\phi}^{impl}_{t+\tau,t} = \frac{1}{1-\lambda\tau}\,x$



Euler implizit: $(\mathbb{1} - \lambda \tau_i) x_{i+1} = x_i$

oder für $\dot{x} = Ax$: $(\mathbb{1} - \tau_i A) x_{i+1} = x_i$ (lin. Gl. system!)

noch allgemeiner : x_{i+1} Nullstelle einer (nicht)linearen Funktion

zunächst: Stabilitätsuntersuchung

1.26 Def Eine Evolution $\phi_{t,t_0} x_0$ heißt (vorwärts) stabil, falls $\forall_{\epsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0}$, so dass

$$\phi_{t,t_0} x \in B_\epsilon(\phi_{t,t_0} x_0) \quad \forall_{t \geq t_0} \; \forall_{x \in B_\delta(x_0)}$$

Sie heißt asymptotisch stabil, falls es zusätzlich $\tilde{\delta} > 0$ gibt mit

$$\lim_{t \to \infty} \| \phi_{t,t_0} x - \phi_{t,t_0} x_0 \| = 0 \; \forall_{x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0)}$$

1.27 Lemma Eine Evolution ist genau dann stabil, wenn für die Kondition $K(t)$ auf $[t_0, t]$ gilt

$$\sup_{t \geq 0} K(t) < \infty$$

Sie ist asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \to \infty} K(t) = 0$

Bew: (V)

$\phi_{t,t_0} B_\delta(x_0) \subset B_\epsilon(x(t))$

asympt. stabil $\quad t \to \infty$

Störungen werden für große Zeiten weg gedämpft!

Für $\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0$

$$K(t) = \| \phi_t \|_\infty = \| e^{tA} \|_\infty$$

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^-$

1.28 **Def** $A \in \mathbb{R}^{d,d}$, dann definiere

$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda \mathbb{1} - A) = 0 \}$ **Spektrum**

$i(\lambda) =$ maximale Dimension eines Jordanblocks zum Eigenwert λ **Index**

$\nu(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$ **Spektralabszisse**

1.29 **Satz** (i) Die Integralkurve x zum AWP $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$ ist genau dann stabil, wenn

$\nu(A) \le 0$ und $\left(\operatorname{Re}\lambda = 0 \Rightarrow i(\lambda) = 1 \ \forall_{\lambda \in \sigma(A)} \right)$

(ii) Sie ist asymptotisch stabil, falls

$\nu(A) < 0$

Bew $\boxed{A = BJB^{-1}}$ $\left[\begin{array}{l} J \text{ Jordannormalform} \\ B \text{ invertierbar} \end{array} \right.$

$e^{tA} = Be^{tJ}B^{-1} \rightsquigarrow$ Es genügt einen Jordanblock $J \in \mathbb{R}^{k,k}$ zu betrachten

$J = \lambda \mathbb{1} + N \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tJ} \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda\mathbb{1},\, N \text{ vertauschen}}}{=} e^{t\lambda} e^{tN} \underset{\substack{\uparrow \\ N^k = 0}}{=} e^{t\lambda} \left(\mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1} \right)$$

$$\Rightarrow |||e^{tJ}|||_\infty \le e^{t\operatorname{Re}\lambda} \underbrace{\left(1 + t|||N|||_\infty + \dots \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} |||N|||_\infty^{k-1} \right)}_{\text{Polynom in } t \text{ vom Grad } (k-1)}$$

$$\le C e^{t(\operatorname{Re}\lambda + \epsilon)}$$

$\Rightarrow$ (ii)

$\boxed{\text{zu (i)}}$ $\operatorname{Re}\lambda = 0 \quad |||e^{tJ}|||_\infty \overset{N=0}{=} |e^{t\lambda}| = 1$ $\square$

Zerlege: $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A) \cup \sigma_0(A)$

mit $\sigma_{(\pm)}(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda \underset{(<)}{>} 0 \}$

$\sigma_0(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda = 0 \}$

E_+, E_-, E_0 seien die dazu gehörenden stabilen, instabilen, zentralen Eigenräume

1.30 Lemma Sei ϕ_t der Fluss zum AWP $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ dann gilt

$$E_- = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \phi_t x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \}$$

$$E_+ = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \phi_t x \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \}$$

Bew: $x(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wie in } 1.29}}{=} B e^{tJ} B^{-1}$ (v)

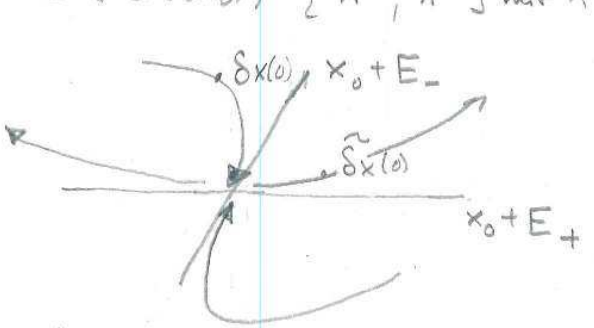
$\square$

Linearisierung bei einem Fixpunkt:

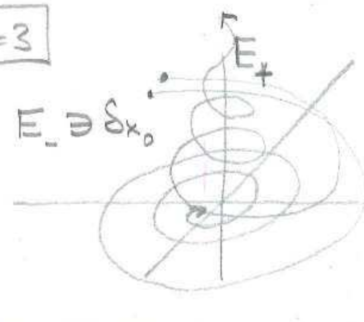
$\dot{x} = v(x) \qquad v(x_0) = 0$

$\dot{\delta x} = Dv(x_0)\,\delta x$ (Diff. gl. für Störung von $x(t) \equiv x_0$)

$\boxed{d=2}$ $\sigma(Dv(x_0)) = \{\lambda^+, \lambda^-\}$ mit $\lambda^\pm \in \sigma_\pm(Dv(x_0))$



$\boxed{d=3}$



E_-

$\left.\begin{array}{l} \lambda_-^1, \lambda_-^2 \text{ komplex konj.} \\ \operatorname{Re} \lambda_-^{1,2} < 0 \end{array}\right\} \to$ Drehung + Kontraktion

1.31 Satz Sei x^* Fixpkt der autonomen Dgl. $\dot{x} = F(x)$, $F \in C^1$, $\nu(DF(x^*)) < 0$, dann ist x^* ein asymptotisch stabiler Fixpkt, d.h. $\exists_\varepsilon \ \forall_{x \in B_\varepsilon(x^*)} \quad \phi_t x \xrightarrow[t\to\infty]{} x^*$.

Bew
$$F(x) = \underbrace{DF(x^*)}_{=A}(x - x^*) + o(x - x^*)$$

o.B.d.A. $x^* = 0$

$$\phi_t x_0 = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} o(\phi_s x_0)\, ds$$

$\nu(A) < -\beta < 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\|\phi_t x_0\| \le C e^{-\beta t} \|x_0\| + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \delta \|\phi_s x_0\|\, ds \quad \text{für } \delta << 1} \quad (*^1)$$

$$\Longrightarrow \|\phi_t x_0\| \le C e^{-(\beta-\delta)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Gronwall'sches Lemma

$\to$ hierzu: $\psi(t) := e^{\beta t} \|\phi_t x_0\| \Rightarrow$

$$\psi(t) \overset{(*^1)}{\le} C\|x_0\| + \delta \int_0^t \psi(s)\, ds$$

Vergleiche mit $\varphi(t)$ Lösung von $\underbrace{\dot{\varphi}(t) = \delta \varphi(t), \ \varphi(0) = C\|x_0\| + \varepsilon}$

$$\Rightarrow \varphi(t) = C\|x_0\| + \varepsilon + \delta \int_0^t \varphi(s)\, ds$$

$$(*^2) \quad \boxed{\varphi(t) = e^{\delta t}(C\|x_0\| + \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\psi(t) - \varphi(t)}_{=:\beta(t)} \le \delta \int_0^t \psi(s) - \varphi(s)\, ds$$

$\beta(0) < 0$ ('$\varepsilon > 0$') **Annahme** Es gebe $t^* = \inf_t \{\beta(t) \ge 0\}$

$$\Rightarrow \beta(t^*) = 0 \le \delta \int_0^{t^*} \underbrace{\beta(s)}_{<0}\, ds < 0 \ \lightning$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(t) < 0 \Rightarrow \psi(t) < \varphi(t)}$$

$$\Longrightarrow \|\phi_t x_0\| = e^{-\gamma t}\psi(t) \overset{(*^2)}{\leq} e^{-\gamma t} e^{\delta t}(C_1\|x_0\| + \epsilon)$$
$$= e^{-(\gamma-\delta)t}(C_1\|x_0\| + \epsilon) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

Genuell case

1.31. <u>Gronwall's Lemma</u> Seien $\alpha, \beta, u : [0,T) \to \mathbb{R}$, $\beta, u \in C^0$, $\beta \geq 0$, α lokal integrierbar auf $[0,T)$ ($T = \infty$ zugelassen).

Ferner gelte
$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\, u(s)\, ds, \quad (*)$$

(i) dann gilt $\displaystyle u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau)\, d\tau\right) ds \;\; \forall_{t\in[0,}$

(ii) Falls α monoton wachsend, dann gilt
$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)\, ds\right)$$

<u>Bem</u> Unter Glattheitsannahmen folgt aus $(*)$ die Differentialungl.
$$\dot{u}(t) \leq \dot{\alpha}(t) + \beta(t) u(t) \quad \text{mit AW} \quad u(0) = \alpha(0)$$

<u>Bew</u>: $\boxed{(i)}$ $\displaystyle \varphi(s) := e^{-\int_0^s \beta(\tau)d\tau} \int_0^s \beta(\tau) u(\tau)\, d\tau \Rightarrow$

$$\dot{\varphi}(s) = \beta(s) \underbrace{\left(u(s) - \int_0^s \beta(\tau) u(\tau)\, d\tau\right)}_{\leq \alpha(s)} e^{-\int_0^s \beta(\tau)d\tau}$$

$$\overset{\int_0^t \cdot\, ds}{\underset{\varphi(0)=0}{\Longrightarrow}} \varphi(t) \leq \int_0^t \beta(s)\alpha(s)\, e^{-\int_0^s \beta(\tau)d\tau} ds$$

<u>Damit folgt</u>: $\displaystyle \int_0^t \beta(s) u(s)\, ds = e^{\int_0^t \beta(\tau)d\tau} \varphi(t)$
$$\leq \int_0^t \beta(s)\alpha(s)\, e^{-\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds$$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ (i)

$\boxed{\text{ad (ii)}}$ $$u(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \underbrace{\alpha(s)}_{\le \alpha(t)} \left(e^{\int_0^s \beta(r)\,dr}\right)'(s)\,ds$$
$$\le \alpha(t)\left(1 + e^{\int_0^t \beta(r)\,dr} - 1\right) \qquad \square$$

Nun übertragen wir den Stabilitätsbegriff auf diskrete Phasenflüsse:

1.32. Def Ein diskreter autonomer Phasenfluß $\hat{\phi}_\tau$ heißt stabil, falls $\sup_{n \in \mathbb{N}} |||\hat{\phi}_\tau^n||| < \infty$

asymptotisch stabil, falls $\lim_{n \to \infty} |||\hat{\phi}_\tau^n||| = 0$

Bem: $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$

$x_{i+1} = (\mathbb{1} + \tau A)x_i$ Eulerverf. (explizit)

stabil $\Leftrightarrow$ $\sup_n |||(\mathbb{1} + \tau A)^n||| < \infty$

$\Leftarrow$ A symm. $\sigma(A) \subset [-\lambda, 0]$ $\tau \le \frac{2}{\lambda}$

asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ $|||(\mathbb{1} + \tau A)^n||| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Leftarrow$ A symm. $\sigma(A) \subset [-\lambda, 0)$, $\tau < \frac{2}{\lambda}$

$\longrightarrow$ R.-K.-Verfahren zu $\dot{x} = Ax$:

$$\hat{\phi}_\tau = P(\tau A) \text{ mit } P \in \mathcal{P}_s$$

Eulerverfahren $P(t) = 1 + t$

Cauchy-Eulerverfahren $P(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$

$$x_{i+1} = x_i + \tau A(x_i + \frac{\tau}{2} A x_i)$$
$$= (1 + \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2)\, x_i$$

allgemein: Rationale Fkt'n

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \qquad \hat{\Phi}_\tau = R(\tau A) \quad :\Longleftrightarrow$$

$$Q(\tau A) x_{i+1} = P(\tau A) x_i \quad \text{(Gl. system)}$$

einfachster Fall: $\left.\begin{array}{l} P = 1 \\ Q = 1 - t \end{array}\right\} \quad R(t) = \frac{1}{1-t}$

$$\Longleftrightarrow \quad (\mathbb{1} - \tau A) x_{i+1} = x_i \quad \text{(implizites Euler-Verfahren)}$$

1.33 Satz

Mindest-Komplexität $\rightarrow$

Sei $R(.) = \frac{P(.)}{Q(.)}$ eine rationale Approximation der Exponential-Fkt. der Ordnung p (Konsistenzord.) dann gilt $\quad p \leq \deg P + \deg Q$

Bew Annahme: $\deg P = k$, $\deg Q = j$ und $p > k + j \Rightarrow$

$$\frac{P(t)}{Q(t)} - e^t = O(t^{k+j+2}) \overset{Q(0) \neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$(*) \quad P(t) - Q(t) e^t = O(t^{k+j+2}) \overset{!}{\Longrightarrow} P, Q = 0$$

hierzu: $\boxed{\text{Induktion über } k}$ $\boxed{k = 0}$ $\quad P = c \Rightarrow$

$$c e^{-t} - Q(t) = O(t^{j+2}) \Rightarrow$$

$Q \in \mathcal{P}_{j+1}$ mit höchstem Koeff $\neq 0$ ↯

außer $c = 0$ und damit $Q \equiv 0$

$\boxed{k \rightsquigarrow k+1}$ differenziere $(*)$ nach t:

$$P'(t) - (Q'(t) + Q(t)) e^t = O(t^{k+j+1})$$

$$\underset{\text{Ind. Ann.}}{\Longrightarrow} \quad P' \equiv 0 \Rightarrow P = c \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} Q \equiv 0, P \equiv 0$$

□

1.34 Def

Zum AWP $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ definiere

Stabilitätsbereich: $\quad S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1 \}$

d.h. falls $\tau\lambda \in S \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$, dann ist die diskrete Evolution stabil $(R(\tau A) = B R(\tau J) B^{-1})$

Bsp

1.35 Lemma Der Stabilitätsbereich von polynomialen diskreten Flüssen (explizite Verfahren) ist kompakt.

Bew $P(t) \xrightarrow[\substack{|t|\to\infty \\ t\in\mathbb{C}}]{} \infty \Rightarrow S = \{t \mid |P(t)| < 1\}$ ist kompakt $\square$

Für nichtlineare AWP'e $\dot{x} = F(x)$, $x(0) = x_0$ mit Fixpkt x^* $(F(x^*)=0)$

mittels Linearisierung

suchen wir numerische Verfahren basierend auf rationalen Fkt'n $R(\cdot)$ für die $R(\tau DF(x^*))$ stabil ist

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau\,\sigma(DF(x^*)) \subset S}$$

1.36 Def (implizite R-K-Verfahren)

Das Schema

$$k_i = F\left(t + c_i\tau,\ x + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right) \quad \forall i = 1,\dots,s$$

$$\hat{\Phi}^{t+\tau,t}x = x + \tau\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

mit einem $a_{ij} \neq 0$ für $j \geq i$ heißt implizites Runge-Kutta-Verfahren.

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

$\leadsto$ [nichtlineares Gl. System mit $d \cdot s$ Unbek. $(k_i)_{i=1,\dots,s}$]

1.37. Satz (Lösbarkeit)

Sei F Lipschitzstetig, dann gibt es für kleine Zeitschritte eine eindt. Lösung des Gl.-Systems zu einem impl. R-K.-Vf.

Bew: $g_i(k) = F\left(t+c_i\tau, x+\tau\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right)$ für $k = (k_1, \dots, k_s)$

Fixpkt-Aufgabe: $\quad k = g(k) \quad$ mit $g = (g_i)_{i=1,\dots,s}$

$\Updownarrow$

R-K-Vf.

F Lipschitz in x

$$\| g(k) - g(\tilde{k}) \| \le O(\tau) \| k - \tilde{k} \|$$

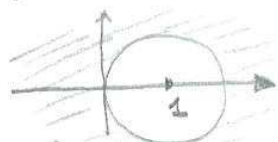
$\xRightarrow[\text{Banachscher Fixpkt-Satz}]{}$ Beh $\square$

1.38 Bsp

- $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ Rückwärts-Eulerverfahren (1. Ordnung)

$$x_{i+1} = x_i + \tau F(t_i + \tau, x_{i+1})$$

$$R(t) = \frac{1}{1-t}$$



$S = \mathbb{C} \setminus B_1(1)$

- $\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$ Crank-Nicolson-Verfahren (2. Ordnung)

$$x_{i+1} = x_i + \tau F\left(t_i + \frac{\tau}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

hierzu: $\quad k_1 = F\left(t_i + \frac{\tau}{2}, x + \frac{\tau}{2} k_1\right)$

$$x_{i+1} = x_i + \tau k_1 \Rightarrow \tau k_1 = x_{i+1} - x_i$$

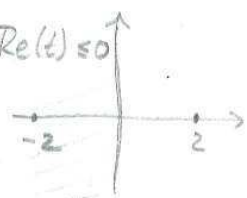
$\boxed{F(t,x) = x} \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) x_{i+1} = \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i$

$$\Rightarrow \quad R(t) = \frac{1 + \frac{t}{2}}{1 - \frac{t}{2}}$$

Stabilitätsbereich: $\quad S = \{ t \mid |R(t)| \le 1 \}$

$$= \left\{ t \;\middle|\; \left|1 + \frac{t}{2}\right| \le \left|1 - \frac{t}{2}\right| \right\}$$

$$\Leftrightarrow |2 + t| \le |2 - t|$$



Für die Wärmeleitung mit Differenzenquotienten-diskretisierung ($\partial_t u - \Delta u = 0$):

$$\left(\mathbb{1} + \frac{\tau}{2} L_h\right) \overline{u_h}^{i+1} = \left(\mathbb{1} - \frac{\tau}{2} L_h\right) \overline{u_h}^{i}$$

- implizite Trapezregel

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$k_1 = F(t_i, x_i)$$

$$k_2 = F\left(t_i + \tau, x_i + \frac{\tau}{2} k_1 + \frac{\tau}{2} k_2\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2} k_1 + \frac{\tau}{2} k_2$$

$\boxed{F(t,x) = x}$ $\quad k_1 = x_i \quad k_2 = \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i + \frac{\tau}{2} k_2$

$$\Rightarrow k_2 = \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i + \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) x_{i+1} = \left(\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)\left(1 + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)\right) x_i$$

$$= \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) x_i \quad \Rightarrow \text{C.-N.-Verf.}$$

1.34 **Lemma** Ein s-stufiges, impl. Runge-Kutta-Verfahren ist höchstens konsistent von der Ordnung 2s.

Bew $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ und $\deg P, \deg Q \leq s$

$\overset{1.33.}{\Rightarrow}$ Konsistenz-Ordnung $p \leq s + s = 2s$

s-fache Schachtelung von F-Auswertungen

$\square$

Bem Lösung des nichtlinearen Gl. systems

$$G_i(k) = k_i - F\left(t_i + c_i \tau, x_i + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \quad (i = 1, \ldots s)$$

mit Newton-Verfahren

32

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots s} \qquad h = (h_i)_{i=1,\dots s} \qquad k = (k_j)_{j=1,\dots s} \subset \mathbb{R}^d$$

$$Dh = \delta_{ij}\delta_{ek} - \tau\, A_{ij}\, (DF)_{ek}(\dots) \qquad F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$$h : (\mathbb{R}^d)^s \to (\mathbb{R}^d)^s$$

$\to$ einfachster Fall $\boxed{d=1}$ $\quad h : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ mit

$$Dh = \mathbb{1} - \tau A F_{,x}(\dots)$$

vereinfachtes Newton-Verfahren: ersetze $F_{,x}(t_i + c_i\tau, x_i + \tau A k)$ durch $F_{,x}(t_i, x_i) =: J$

$$\boxed{(\mathbb{1} - \tau A J)(k^{n+1} - k^n) = -h(k^n)} \quad \text{mit} \quad \boxed{k^0 = 0}$$

- weniger $F_{,x}$-Auswertungen
- nur 1. Ordnung konvergent (o.K. für kleines τ)

nun betrachten wir Kollokations-Verfahren:

$\boxed{\text{Ansatz}}$ Konstruiere Polynom $p \in \mathcal{P}_s^d$ mit

$$\left[\begin{array}{l} (i)\ \ p(t) = x \\ (ii)\ \ p'(t + c_i\tau) = f(t + c_i\tau, p(t + c_i\tau)) \\ \qquad\qquad \text{für } i = 1,\dots s \end{array}\right] \leftarrow \boxed{\text{löst Dgl. in } (t + c_i\tau)_{i=1,\dots s}}$$

Zeitschritt: $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}\, x = p(t+\tau)$

Interpretation als Runge-Kutta-Verfahren (hier: $d=1$, $d>1$ analog)

$\{L_1, \dots L_s\}$ Lagrange-Basis aus $\mathcal{P}_{s-1}$ bzgl. der Stützstellen $c_1, \dots c_s$.

$$\Rightarrow \quad L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - c_i}{c_j - c_i} \qquad \left(L_i(c_j) = \delta_{ij} \right)$$

Abkürzung: $k_j := p'(t + c_j\tau) \Rightarrow$

$$p'(t + \Theta\tau) = \sum_{j=1}^{s} k_j L_j(\Theta)$$

$$p(t + c_i\tau) = x + \tau \int_0^{c_i} p'(t + s\tau)\, ds$$

$$(*) \qquad = x + \tau \sum_{j=1}^{s} \boxed{\underbrace{\int_0^{c_i} L_j(s)\, ds}_{=:\, a_{ij}}} k_j \quad \rightsquigarrow p \in \mathcal{P}_s$$

Damit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} k_i &= p'(t + c_i\tau) \overset{(ii)}{=} f(t + c_i\tau, p(t + c_i\tau)) \\ &= f(t + c_i\tau, x + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \\ \hat{\varphi}_{t+\tau,t}\, x &= p(t+\tau) = x + \int_0^1 p'(t + \Theta\tau)\, d\Theta \\ &= x + \tau \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \\ &\text{mit } \boxed{b_j = \int_0^1 L_j(s)\, ds} \end{aligned}\right\} R\text{-}K(s)$$

1.40. Bem: • $a_{ij} = a_{ij}(c)$, $b_j = b_j(c)$ $\quad c = (c_i)_{i=1,\ldots,s}$

• Falls (R-K)(s) lösbar $\overset{(*)}{\Rightarrow}$

$$\boxed{p(t + \Theta\tau) = x + \tau \sum_{j=1}^{s} k_j \int_0^{\Theta} L_j(s)\, ds}$$

ist das Kollokationspolynom.

Das Gauß-Verfahren:

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{s} b_i\,\varphi(c_i) \quad \text{exakt vom Grad } 2s-1 \text{ (maximal)}$$

$\Longleftrightarrow$ (ALMA II) $(c_j)_{j=1,\dots,s}$ die Nullstellen des s'ten orthogonalen Polynoms.

$$\left(\int_0^1 p_s\,p_r\,dr = 0 \quad \forall_{r\neq s}\right)$$

$\boxed{s=1}$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

s.u.

$p=2$

$\boxed{s=2}$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

s.u.

$p=4$

1.41 Satz Ein durch Kollokation erzeugtes R-K-Verf. besitzt die Konsistenz-Ordnung p für rechte Seiten $F \in C^p$ genau dann, wenn die Quadraturformel $\varphi \mapsto \sum_{i=1}^{s} b_i\,\varphi(c_i)$ für Funktionen $\varphi \in C^p$ die Ordnung p besitzt.

Insbesondere ist das Gauß-Verfahren konsistent von der Ordnung $2s$ (exakt vom Grad $2s-1$ $\Rightarrow$ Integrationsfehler τ^{2s})

(ohne Beweis)

(1.41) + (1.33) maximale Konsistenzordnung wird angenommen!

2. Interpolation und Approximation im $\mathbb{R}^d$

zunächst betrachten wir den Fall $d=1$ (vgl. ALMA II):

2.1. Lagrange-Interpolation: $f \in C^0$ gegeben, $p \in \mathcal{P}_n$ gesucht mit

$$p(t_i) = f(t_i) \quad i = 0, \dots, n$$

Existenz einer eindt. Interpolante:

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} \quad \text{Lagrange-Basis} \quad L_j(t_i) = \delta_{ij}$$

$\{L_i\}_{i=0,\dots,n}$ linear unabh., $p(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(t) \Rightarrow$

$$p(t_i) = f(t_i) \Rightarrow \text{Existenz}$$

$p, \tilde{p}$ Interpolanten $\Rightarrow (p-\tilde{p})$ hat $n+1$ Nullstellen $t_0, \dots, t_n$

$$\Rightarrow p - \tilde{p} \equiv 0 \Rightarrow \text{Eindeutigkeit} \quad \square$$

2.2. Hermit-Interpolation:

Knotenmenge: $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \, t_{n-1} \leq t_n = b$

$$d_i = \max \{ j \mid t_i = t_{i+j} \}$$

Freiheitsgrade: $\mu_i : C^{d_i}([a,b]) \to \mathbb{R} \quad \mu_i(f) = f^{(d_i)}(t_i)$

Hermitinterpolation: $f \in C^{d_{max}}([a,b])$ mit $d_{max} = \max_i d_i$,

$$p \in \mathcal{P}_n \text{ gesucht mit } \mu_i(p) = \mu_i(f) \quad i = 0, \dots, n$$

Existenz einer eindt. Interpolante:

$\mu : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1} \quad p \mapsto (\mu_0(p), \dots, \mu_n(p))$ lin. Abb.

$\dim \mathcal{P}_n = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$ z.z. Injektivität

$\mu(p) = 0 \Rightarrow$ p hat ausschliesslich mehrfache Nullstellen

$(n+1)$ Nullstellen $\Rightarrow p = 0$ #

Bem. $d_i = 0 \ \forall_{i=0,\dots,n} \Rightarrow$ Lagrange-Interpolation

- Hermit-Basis $\{H_i\}_{i=0,\dots,n}$ mit $\mu_i(H_j) = \delta_{ij}$
- Notation $p(t) = (P_{t_0,\dots,t_n} f)(t)$

2.3. Satz (Darstellung) (vgl. Satz 1.18 ALMA II)

$f \in C^{d_{max}}([a,b])$, dann gilt

$$(P_{t_0 \dots t_n} f)(t) = \sum_{i=0}^{n} (D_{t_0 \dots t_i} f)\, \omega_i(t)$$

mit $\omega_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_j)$ für $i = 1,\dots,n$, $\omega_0(t) \equiv 1$

(Newton-Basis)

$$D_{t_0,\dots t_i} f := a_i \text{ für } (P_{t_0 \dots t_i} f)(t) = a_i t^i + \dots a_1 t + a_0$$

Es gilt $\boxed{t_0 = t_1 = \dots t_j} \Rightarrow D_{t_0 \dots t_j} f = \dfrac{f^{(j)}(t_0)}{j!}$

$\boxed{t_i \neq t_j,\ i,j \in \{0,\dots n\}}$ $D_{t_0 \dots t_n} f = \dfrac{D_{t_0 - \hat{t}_i - t_n} f - D_{t_0 - \hat{t}_j - t_n} f}{t_j - t_i}$

$\hat{t}_k$ ausgelassen

(dividierte Differenzen)

Ferner gilt $f(t) = (P_{t_0 \dots t_n} f)(t) + (D_{t_0 \dots t_n t} f)\, \omega_{n+1}(t)$

eingefügt

Bew (i) Darstellung von $P_{t_0,\dots t_n} f$ (Induktion):

$\boxed{n=0}$ (V)

$\boxed{n-1 \rightsquigarrow n}$

$$(P_{t_0 \dots t_n} f)(t) = (D_{t_0 \dots t_n} f)\, \underbrace{\omega_n(t)}_{\text{höchster Koeff} = 1} + \overbrace{q_{n-1}(t)}^{\in \mathcal{P}_{n-1}}$$

$$\Rightarrow q_{n-1}(t) = (P_{t_0 \dots t_n} f)(t) - (D_{t_0 \dots t_n} f)\, \omega_n(t)$$

$\Rightarrow$ q_{n-1} erfüllt die Interpolationsbedingungen

$\mu_i(q_{n-1}) = \mu_i(f)$ für $i = 0, \ldots, n-1$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\mu_i(\omega_n) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n}$

$$\Rightarrow \quad q_{n-1}(t) = (P_{t_0 \ldots t_{n-1}} f)(t) \underset{\text{Ind. annahme}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} D_{t_0 \ldots t_i} f \; \omega_i(t) \qquad (v)$$

(ii) Restterm-Darstellung:

$$\boxed{s \mapsto (P_{t_0 \ldots t_n} f)(s) + D_{t_0 \ldots t_n t} f \; \omega_{n+1}(s)} \qquad (*)$$

interpoliert bzgl. Knotenmenge $t_0, \ldots, t_n, t$:

$\boxed{t \notin \{t_0, \ldots, t_n\}}$ (i) $\Rightarrow$ (*) interpoliert für $s = t$ $\Rightarrow$ Beh

$\boxed{t \in \{t_0, \ldots, t_n\}}$ $\omega_{n+1}(t) = 0$, $(P_{t_0, \ldots, t_n} f)(t) = f(t)$ $\Rightarrow$ Beh

(iii) Darstellung der $D_{t_0 \ldots t_j}$:

$\boxed{t_0 = t_1 = \ldots t_j}$
$$(P_{\underbrace{t_0 \ldots t_0}_{(j+1)\text{ Terme}}} f)(t) \underset{\text{Taylorentw.}}{=} \sum_{k=0}^{j} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0)$$

$\Rightarrow$ höchster Koeff.: $\dfrac{f^{(j)}}{j!}$ $\Rightarrow$ Beh.

$\boxed{t_i \neq t_j}$ wir zeigen:

$$(P_{t_0 \ldots t_n} f)(t) \overset{!}{=} \frac{\overbrace{(P_{t_0 \ldots \hat{t}_i \ldots t_n} f)(t)\,(t-t_j)}^{A(t)} - \overbrace{(P_{t_0 \ldots \hat{t}_j \ldots t_n} f)(t)\,(t-t_i)}^{B(t)}}{t_j - t_i}$$

$\rightsquigarrow$ Beh

hierzu: Nachweis der Interpolationsbedingungen

$\boxed{m \notin \{i, j\}}$ A, B interpolieren bzgl. Knotenmenge

$$t_0 \ldots \hat{t}_i \ldots t_j \ldots t_n$$

(da mit $f^{(k)}(t_m)$ auch $f^{(k-1)}(t_m)$ interpoliert wird)

$\Rightarrow$ Interpolationsbedingung von t_m erfüllt

$\boxed{m = i}$ A(t) erfüllt Interpolationsbedingung $\mu_k(A(t)) = \mu_k(f)$ zu $t_k = t_m, k <$

B(t) erfüllt " $\mu_k(B(t)) = \mu_k(f)$ $t_k = t_m, k \leq$

$\Rightarrow$ Rechte Seite erfüllt alle Bedingungen

$\boxed{m = j}$ analog

$\square$

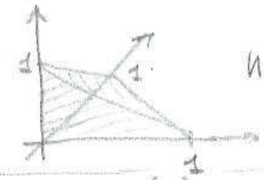
Bem: 2.3. $\Rightarrow$ Rechenschema (Neville-Aitken)

2.4. Satz (Integral-Darstellung der dividierten Differenzen)

$$D_{t_0 - t_n} f = \int_{\Sigma^n} f^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} s_i t_i\right) ds$$

mit $\Sigma^n = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} s_i \le 1 \;;\; s_i \ge 0 \right\}$, $s_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} s_i$

(n-Simplex)



$n = 3$

$D_{t_0 - t_n} f$ ist Integralmittel von $f^{(n)}$ mit auf $\frac{1}{|\Sigma^n|} \underset{(s.u.)}{=} \frac{1}{n!}$

Bew (Induktion)

$\boxed{n=0}$ $\quad D_{t_0} f = f(t_0) = \int_{\Sigma^0} f^{(0)}(s t_0)\, ds$ ← Zählmaß

$\boxed{n \leadsto n+1}$ $\quad \int_{\Sigma^{n+1}} ds \; (= |\Sigma^{n+1}|) = \int_0^1 s_{n+1}^{n} \int_{\Sigma^n} ds_{1-n}\, ds_{n+1} \underset{\text{Induktion}}{=} \frac{1}{n+1} |\Sigma^n| = \frac{1}{(n+1)!}$

$\boxed{t_0 = \text{——} \; t_{n+1}}$ $\Rightarrow \int_{\Sigma^{n+1}} f^{(n+1)}\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n+1} s_i t_i}_{t_0}\Big) ds = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!} \underset{2.3.}{=} D_{t_0 - t_n} f$

$\boxed{t_0 \neq t_{n+1}}$

$$\int_{\Sigma^{n+1}} f^{(n+1)}\left(\sum_{i=0}^{n+1} s_i t_i\right) ds =$$

$$\int_{\sum_{i=1}^{n} s_i \le 1} \underbrace{\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n} s_i} f^{(n+1)}\left(t_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i (t_i - t_0) + s_{n+1}(t_{n+1} - t_0)\right) ds_{n+1}}\, ds_{1-n}$$

$$= \frac{1}{t_{n+1} - t_0} \left(f^{(n)}\left(t_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} s_i (t_i - t_{n+1})\right) - f^{(n)}\left(t_0 + \sum s_i (t_i - t_0)\right) \right)$$

$$= \frac{1}{t_{n+1}-t_0}\left(\int_{\Sigma^n} f^{(n)}\left(\sum_{i=1}^{n+1} s_i t_i\right)ds - \int_{\Sigma^n} f^{(n)}\left(\sum_{i=0}^{n} s_i t_i\right)ds\right)$$

$$\underset{\text{Induktionsannahme}}{=} \frac{1}{t_{n+1}-t_0}\left(D_{t_1 \ldots t_{n+1}} f - D_{t_0 \ldots t_n} f\right)$$

$$\overset{2.3.}{=} D_{t_0 \ldots t_{n+1}} f \qquad \square$$

2.5 Folgerung: Sei $f \in C^{d_{max}}([a,b])$, dann ist $(t_0, \ldots t_n) \to D_{t_0 \ldots t_n} f$ stetig und zu $(t_0, \ldots t_n) \in [a,b]^{n+1}$ existiert $\tau \in [a,b]$ mit

$$D_{t_0 \ldots t_n} f = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!}$$

Bew: Integral-Mittelwertsatz

2.6. Satz (Fehlerabschätzung)

$f \in C^{n+1}([a,b])$, dann gilt mit $h = [a,b]$

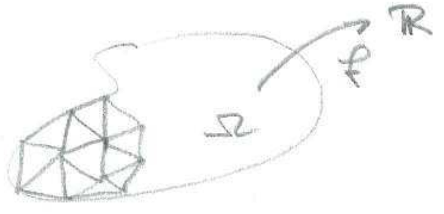
$$\| f - P_{t_0 \ldots t_n} f \|_{\infty,[a,b]} \le \max_{\tau \in [a,b]} \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Bew

$$\| f - P_{t_0 \ldots t_n} f \|_\infty \overset{2.3.}{=} \| \underbrace{(D_{t_0 \ldots t_n t} f)}_{= \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}} \underbrace{\omega_{n+1}(t)}_{\| \cdot \|_\infty \le h^{n+1}} \|_\infty$$

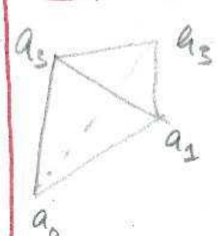
$\square$

Nun betrachten wir die Interpolation auf Simplizes:



- Approximiere Ω durch Simplizes T (Triangulierung)
- Interpoliere f auf jedem T durch ein Polynom $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

2.7. Def (<u>Simplex im $\mathbb{R}^d$</u>) (vgl. WS15/16)



Seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$ gegeben mit $(a_1-a_0), \dots, (a_d-a_0)$ lin. unabh., dann heißt

$$T = \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i,\ 0 \le \lambda_i,\ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \Big\}$$

(nicht degenerierter) <u>Simplex</u>

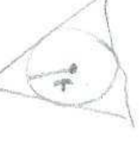
$\lambda(x) = (\lambda_0(x), \dots, \lambda_d(x))$ ist der Vektor der <u>baryzentrischen Koordinaten</u>

$\hat{T}$ mit $(a_0 = 0,\ a_i = e_i\ (i = 1, \dots, d))$ Einheitssimplex $(= \Sigma^d)$

$F = \{ x \in T \mid \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} = 0 \}$ heißt $(d-k)$-dim. <u>Untersimplex</u>

$h(T) = \max_{i,j} |a_i - a_j|$ <u>Durchmesser</u> von T

$\rho(T) = 2 \sup\{ r \mid B_r \text{ Kugel}, \overline{B_r} \subset T \}$ <u>Inkugeldurchmesser</u>



2.8 Lemma $\boxed{\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}\,;\; x \mapsto \lambda(x) \text{ mit } \sum_{i=0}^{d} \lambda_i(x) a_i = x \text{ und } \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ ist linear.}}$

Bew

$$x = \lambda_0(x)\, a_0 + \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(x)\, a_j$$

$$\overset{a_0 = \sum_{j=0}^{d} \lambda_j a_0}{\Longrightarrow} \quad x - a_0 = 0 + \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(x)\,(a_j - a_0)$$

$\Longrightarrow$ Lineares Gl.system
$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 - a_0 & \cdots & a_d - a_0 \\ | & & | \end{pmatrix}}_{A_T} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ x - a_0 \\ | \end{pmatrix}$$

2.7 $\Rightarrow$ A_T invertierbar

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1-d}(x) = A_T^{-1}(x - a_0)$$

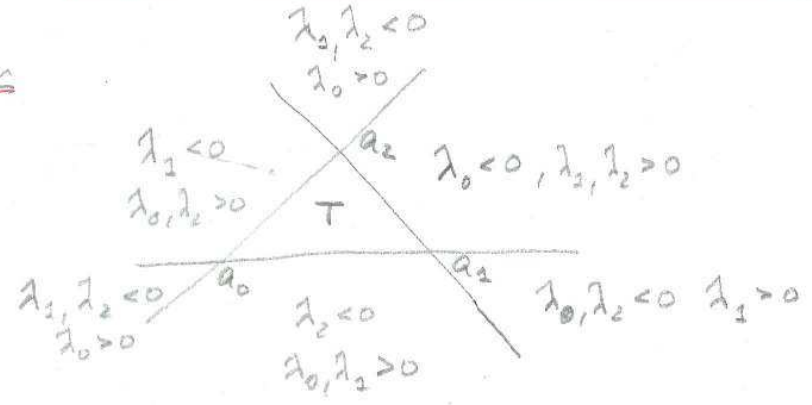
$$\lambda_0(x) = 1 - \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(x)$$

$$\boxed{\lambda_{0-d}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{d} (A_T^{-1})_i \\ \hline A_T^{-1} \end{pmatrix} (x - a_0)}$$

i-te Zeile von A_T^{-1}

$\square$

Bem



2.9. Satz (Polynome auf Simplizes)

Sei $\mathcal{P}_k^d$ der Raum der Polynome vom Grad $\le k$ auf $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{P}_k^d = \Big\{ p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \;\Big|\; p = \sum_{|\beta| \le k} c_\beta\, x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d} \Big\}$$

mit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_d$ (Multiindex)

Ferner sei $\mathcal{N}_k(T) = \Big\{ x = \sum^n \lambda_j a_j \;\Big|\; \lambda_j \in \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ \sum_{j=0}^{d} \lambda_j = 1 \Big\}$

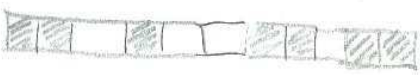
eine (Lagrange-) Knotenmenge, dann ist $p \in \mathcal{P}_k^d$ eindeutig beschrieben durch die Werte auf $\mathcal{N}_k(T)$, $\operatorname{card} \mathcal{N}_k(T) = \dim \mathcal{P}_k^d = \binom{n+k}{k}$,

die Lagrange-Basisfunktionen zu $\mathcal{N}_k(T)$ sind gegeben als

$$L_\alpha(\lambda) = \prod_{l=0}^{d} \prod_{j=0}^{\alpha_l - 1} \frac{\lambda_l - \frac{j}{k}}{\frac{\alpha_l}{k} - \frac{j}{k}} \qquad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_d),\ |\alpha| = k$$

(in baryzentrischen Koordinaten)

Bew (i) $\dim \mathcal{P}_k^d$? $\Leftrightarrow$ Aufgabe: Maximal k Koordinaten x_i aus d verschiedenen auswählen $\Leftrightarrow$ Monomwahl $x_{i_1} \cdots x_{i_{|\beta|}}$

[$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$ $x_1^2 x_2^1 x_3^0 x_4^2$

k auswählen aus $d+k$. $(d=4, k=7)$]

$$\Rightarrow \dim \mathcal{P}_k^d = \binom{d+k}{k}$$

$\operatorname{card} \mathcal{N}_k$? $\Leftrightarrow$ Aufgabe: maximal k $\frac{1}{k}$ auf $\lambda_1 \dots \lambda_d$ verteilen $(\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i)$

$$\Rightarrow \operatorname{card} \mathcal{N}_k = \binom{d+k}{k}$$

(ii) $L_\alpha \in \mathcal{P}_k^d(V)$

(iii) $\mu : \mathcal{P}_k^d \to \mathbb{R}^{\binom{d+k}{k}}$, $\mu(p) = (p(x))_{x \in \mathcal{N}_k(T)}$

μ linear, z.z. μ surjektiv (da Dimensionsgleichheit)

$\Leftrightarrow \quad L_\alpha(\lambda(x_\beta)) = \delta_{\alpha\beta} \qquad x_\beta = \sum \frac{\beta_i}{k} a_i$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & ; \alpha = \beta \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

hierzu: $\boxed{\alpha = \beta}$ $\lambda_\ell(x_\alpha) = \frac{\alpha_\ell}{k} \Rightarrow L_\alpha\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 1$

$\boxed{\alpha \neq \beta}$ $\exists\, i \in \{0, \dots, d\} \quad \beta_i < \alpha_i \quad (\text{da } \sum \beta_i = \sum \alpha_i)$

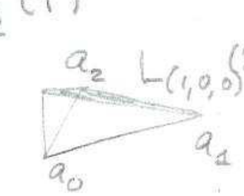
$\Rightarrow \exists\, j \in \{0, \dots, \alpha_i - 1\} \quad j = \beta_i$

$\Rightarrow L_\alpha\left(\frac{\beta}{k}\right) = 0 \qquad (V)$

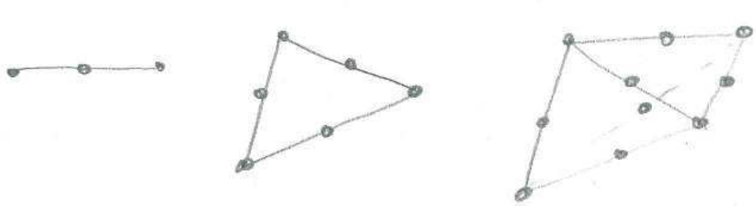
Bsp $\boxed{k=1}$

$\mathcal{N}_k(T)$

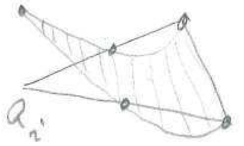
$L_\alpha(\lambda) = \lambda_i$ falls $\alpha = e_i$; $i = 0, \dots, d$



$\boxed{k=2}$



$\mathcal{N}_k(T)$



$L_{2e_i}(\lambda) = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$

$L_{e_i+e_j}(\lambda) = 4\lambda_i\lambda_j$

<u>Bem</u> $\mathcal{P}_k^d \subsetneq \underbrace{\mathcal{P}_k \otimes \text{———} \, \mathcal{P}_k}_{d\text{-faches Tensorprodukt}}$

<u>Bsp:</u> $xy \notin \mathcal{P}_1^2$ aber $xy \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_1$

2.10. <u>Erinnerung</u> (<u>Triangulierung</u>)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, polygonal berandet

$\mathcal{T} = \{ T_i \mid i \in I,\ T_i$ nicht deg. Simplex $\}$

heißt <u>zulässige</u> Triangulierung von Ω, falls

(i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in I} T_i$ (ii) $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$

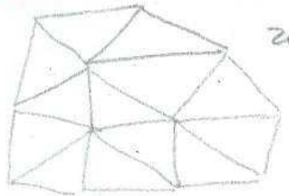
$T_i \cap T_j$ ist $(n-k)$-dim <u>Untersimplex</u> von T_i und T_j $(0 \leq k \leq d)$

$h = h(\mathcal{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} h(T)$ $\sigma = \sigma(\mathcal{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{h(T)}{\rho(T)}$

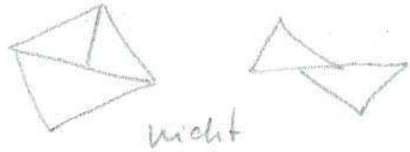
Eine Familie von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ heißt <u>regulär</u>, falls

$\sigma(\mathcal{T}_j) \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}$

<u>Bsp</u>

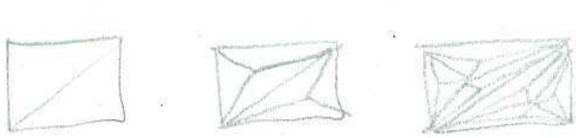


zulässig



nicht zulässig

regulär



nicht regulär

2.11. <u>Lemma</u> (Interpolation auf Triangulierungen)
$\mathcal{T}_h$ sei zulässige Triangulierung auf Gebiet Ω mit Gitterweite h, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $p_{k,T} \in \mathcal{P}_k^d$ Interpolationspolynom auf T zur Knotenmenge $\mathcal{N}_k(T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$, dann ist mit
$v|_T(x) = p_{k,T}(x)$ eine stückweise polynomiale, stetige Interpolation definiert und wir schreiben $\mathcal{I}_h(f) = v$.

<u>Bew</u> <u>z.z. Stetigkeit</u>: $p_{k,T}$, $p_{k,T'}$ zu T, T' gegeben
$T \cap T' = (d-1)$ dim. Untersimplex E
o.B.d.A. $E = \{ x \in T \mid \lambda_0^T(x) = 0 \} = \{ x \in T' \mid \lambda_0^{T'}(x) = 0 \}$

$\Rightarrow$ $p_{k,T}|_E$, $p_{k,T'}|_E \in \mathcal{P}_k$ über $\lambda_1, \ldots \lambda_n$
mit Knotenwerten auf $\mathcal{N}_k(E)$
$\overset{2.9.}{\Longrightarrow}$ $p_{k,T}|_E = p_{k,T'}|_E$ $\Rightarrow$ Stetigkeit und Wohldefiniertheit von $\mathcal{I}_h(f)$

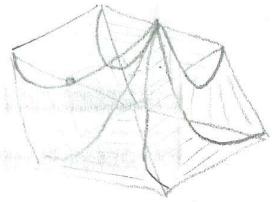
<u>Bsp</u>:

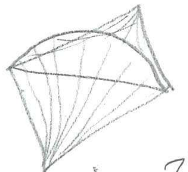
$v_{2,T}, v_{2,T'}$ quadr. Polynome auf Kante E mit gleichen Werten auf $\mathcal{N}_2(E)$

□

2.12. <u>Bem</u> Wenn man $\mathcal{N}_k = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{N}_k(T)$
betrachtet und
Funktionen $\varphi_x(\cdot)$ definiert mit
$\varphi_x|_T \in \mathcal{P}_k^d$, $\varphi_x(y) = \begin{cases} 1 ; & x = y \\ 0 ; & x \neq y \end{cases}$ für $x, y \in \mathcal{N}_k$
dann erhält man eine <u>Basis des Raums</u>
$V_{k,h} := \{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k^d \ \forall T \in \mathcal{T} \}$
(<u>Finite-Elemente-Raum</u>)

Bsp $\boxed{d=2,\ k=2}$





Basisfunktionen in $V_{2,h}$

$\boxed{k=1}$ Hütchenbasis

2.13 **Satz** (Fehlerabschätzungen in der Maximum-Norm)

Ω polygonal berandetes Gebiet, $\{T_h\}_h$ Familie zulässiger, regulärer Triangulierungen mit Gitterweite h, $f \in C^{k+1}(\bar\Omega)$, $I_h(f)$ Lagrange-Interpolation in $V_{k,h}$, dann gilt

$$\| I_h(f) - f \|_{\infty,\bar\Omega} \le C\, h^{k+1} \| D^{k+1} f \|_{\infty,\bar\Omega}$$ mit

$$\| g \|_{\infty,\bar\Omega} := \max_{x\in\bar\Omega} \| g(x) \| .$$

Bew (i) Betrachten wir zunächst das Einheitssimplex

$$\hat T = \{ \hat x \in \mathbb{R}^d \mid \hat x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i ,\ \lambda_i \ge 0 ,\ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \le 1 \}$$

$$\hat f : \hat T \to \mathbb{R} \in C^{k+1}(\hat T)$$

$\hat I(\hat f) = \hat p$ sei die Lagrange-Interpolation von $\hat f$ in $\mathcal{P}_k^d$:

$$\hat p(x) = \sum_{\substack{|\alpha| = k \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}}} L_\alpha(\lambda(\hat x))\, \hat f(\hat x_\alpha)$$

Knoten aus $\mathcal{N}_k(\hat T)$

$$\Rightarrow \| \hat I(\hat f) \|_{\infty,\hat T} \le \underbrace{\binom{d+k}{k} \max_{\alpha,\hat x} \| L_\alpha(\lambda(\hat x)) \|_{\infty,T}}_{\le C(k)} \| \hat f \|_{\infty,\hat T}$$

(Stabilität)

(ii) Abschätzung auf $\hat{T}$:

$$\|\hat{f} - I_k(\hat{f})\|_{\infty,\hat{T}} \le \inf_{\hat{q}\in \mathcal{P}_k^d} \Big(\|\hat{f} - \hat{q}\|_{\infty,\hat{T}} + \underbrace{\| \underset{\hat{I}(\hat{q})}{\underset{\|}{\hat{q}}} - \hat{I}(\hat{f})\|_{\infty,\hat{T}}}_{\overset{(i)}{\le}\, C(k)\, \|\hat{q} - \hat{f}\|_{\infty,\hat{T}}} \Big)$$

$$\le (1 + C(k))\, \underbrace{\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_{\infty,\hat{T}}}_{\le\, C\, \|D_{\hat{x}}^{k+1}\hat{f}\|_{\infty,\hat{T}}}$$

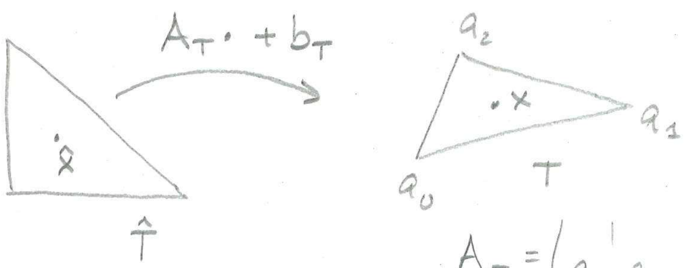
$\hat{f}_k$ Taylorentwicklung der Ordnung k von f

Fehlerabschätzung der Taylorentwicklung

$$\Rightarrow \|\hat{f} - \hat{I}(\hat{f})\|_{\infty,\hat{T}} \le C\, \|D_{\hat{x}}^{k+1}\hat{f}\|_{\infty,\hat{T}}$$

(iii) Nun transformieren wir diese Abschätzung auf bel. Simplex:

$\boxed{T \in \mathcal{T}_h}$



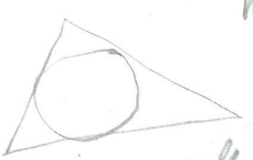
$A_T \in \mathbb{R}^{d,d}$

$b_T \in \mathbb{R}^d \; (= a_0)$

$$A_T = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 - a_0 & \cdots & a_d - a_0 \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Es gilt: $|||A_T||| \overset{!}{\underset{①}{\le}} \dfrac{h(T)}{\rho(\hat{T})}$ $\qquad |||A_T^{-1}||| \overset{!}{\underset{②}{\le}} \dfrac{h(\hat{T})}{\rho(T)}$

hierzu: ① $\dfrac{\|A_T(\hat{x} - \hat{y})\|}{\|\hat{x} - \hat{y}\|} \underset{\hat{x},\hat{y}\in\hat{T}}{\le} \dfrac{\|A_T\hat{x} - A_T\hat{y}\|}{\rho(\hat{T})} \le \dfrac{h(T)}{\rho(\hat{T})}$



$\rho(\hat{T}) = \|\hat{x} - \hat{y}\|$

alle Richtungen aufgegriffen $\longrightarrow$ $|||A_T|||_\infty \le \dfrac{h(T)}{\rho(\hat{T})}$

② analog (✓)

(iv) $\| f - I_e(f) \|_{\infty,T} = \| \hat{f} - \underbrace{\hat{I}_e(\hat{f})} \|_{\infty,\hat{T}}$

$\boxed{\hat{f}(\hat{x}) := f(x)}$

[da $\widehat{I_e(f)} = \hat{I}_e(\hat{f})$
(Knotenwerte gleich an trf. Knoten,
$p \in \mathcal{P}_k^d \iff \hat{p} \in \mathcal{P}_k^d$)]

$$\underset{(iii)}{\leq} \; C_1 \| D_{\hat{x}}^{k+1} \hat{f} \|_{\infty,\hat{T}}$$

Nun gilt aber: $\boxed{\hat{f}(\hat{x}) = f(x) = f(A_T \hat{x} + b_T)}$

$$\Rightarrow D_{\hat{x}} \hat{f}(\hat{x}) = D_x f \, A_T$$

$$\Rightarrow D_{\hat{x}}^{k+1} \hat{f}(\hat{x}) (\hat{w}_1, \ldots \hat{w}_{k+1}) = (D_x^{k+1} f)(A_T \hat{w}_1, \ldots A_T \hat{w}_{k+1})$$

$$\Rightarrow \| D_{\hat{x}}^{k+1} \hat{f}(\hat{x}) \| \leq C_1 \underbrace{\||A_T\||^{k+1}}_{\underset{(iii)}{\leq} \frac{h(T)^{k+1}}{\varrho(\hat{T})^{k+1}}} \| D_x^{k+1} f(x) \|$$

$$\Rightarrow \quad \| f - I_e(f) \|_{\infty,T} \leq C_1 h^{k+1} \||D^{k+1} f\||_{\infty,T}$$

$$\underset{\max_{T \in \mathcal{J}_e}}{\Rightarrow} \quad \text{Beh.} \quad \square$$

späteres Ziel: Einsatz für Fehlerabschätzungen
zu Finiten Elementen (in adaptiver Form)

zunächst: $\boxed{\text{Bezier-Flächen}}$

Erinnerung (ALMA II):

Bernstein-Polynome: $B_i^n(\lambda) = \binom{n}{i}(1-\lambda)^{n-i}\lambda^i$

Eigenschaften: • $\{B_i^n\}_{i=0,\dots,n}$ nicht negative Teilung der 1

$$\left(\sum_{i=0}^{n} B_i^n(\lambda) = ((1-\lambda)+\lambda)^n = 1\right)$$

• $\lambda B_{i-1}^n(\lambda) + (1-\lambda)B_i^n(\lambda) = \underbrace{\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)}_{}\left((1-\lambda)^{n+1-i}\lambda^i\right)$

$= \binom{n+1}{i}$ Pascalsches Dreieck

$\boxed{\text{Notation } B_j^n \equiv 0 \text{ falls } j \notin \{0,\dots,n\}}$

$= B_i^{n+1}(\lambda)$

• $\{B_i^n\}_{i=0,\dots,n}$ Basis von $\mathcal{P}_n$

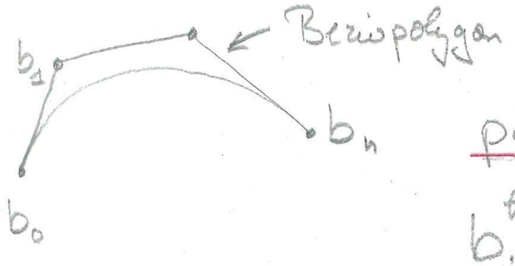
$$\left[\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i^n(\lambda) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \underbrace{B_i^n(1)}_{\substack{=0\\ i<n}} = \alpha_n \underbrace{B_n^n(1)}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_n = 0\right.$$

• $(1-\lambda)^{-1}$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lim_{\lambda\to 1} \frac{B_i^n(\lambda)}{1-\lambda} = c\,\alpha_{n-1} \quad \dots \text{ Induktion}$$

$$\left.\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i=0,\dots,n\ \right]$$

Bezierpolynom: $p(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$



partielle Polynome:

$$b_i^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k(\lambda)$$

definiert durch die Bézierpunkte $b_i, \dots, b_{i+k}$

De Casteljau - Schema

$$b_i^k(\lambda) = (1-\lambda)\, b_i^{k-1}(\lambda) + \lambda\, b_{i+1}^{k-1}(\lambda)$$

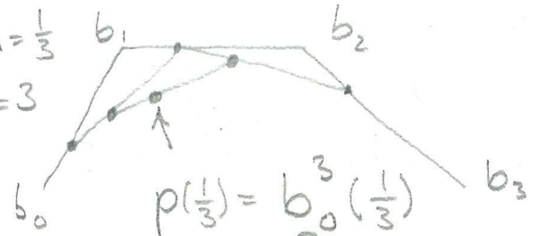
hierzu:
$$b_i^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k(\lambda)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} \left(\lambda B_{j-1}^{k-1}(\lambda) + (1-\lambda) B_j^{k-1}(\lambda)\right)$$
$$= \lambda \sum_{l=\cancel{-1}\,0}^{k-1} b_{i+1+l} B_l^{k-1}(\lambda) + (1-\lambda) \sum_{j=0}^{k-1} b_{i+j} B_j^{k-1}(\lambda)$$

Notation $\boxed{l = j-1}$ Notation

$$= \lambda\, b_{i+1}^{k-1}(\lambda) + (1-\lambda)\, b_i^{k-1}(\lambda)$$

$\lambda = \frac{1}{3}$

$n = 3$



$$p\left(\tfrac{1}{3}\right) = b_0^3\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sum_{i=0}^{3} b_i B_i^3\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$b_0 = b_0^0(\lambda) — b_0^1(\lambda) \quad \dots \quad b_0^{n-1}(\lambda) — b_0^n(\lambda)$

$b_1 = b_1^0(\lambda) \diagup \qquad\qquad b_1^{n-1}(\lambda) \diagup$

$\vdots$

$b_{n-1} = b_{n-1}^0(\lambda) — b_{n-1}^1(\lambda) \qquad\qquad P(\lambda)$

$b_n = b_n^0(\lambda) \diagup$

nun betrachten wir Bézierpolynome über Simplizes:

$\boxed{d=1}$ Beobachtung: $[0,1]$ $\lambda_0 = (1-\lambda)$ $\lambda_1 = \lambda$ baryzentrische Koordinaten

$$B_\alpha^k((\lambda_0,\lambda_1)) = \frac{k!}{\alpha_0!\,\alpha_1!} \lambda_0^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} = B_{\alpha_1}^k(\lambda)$$

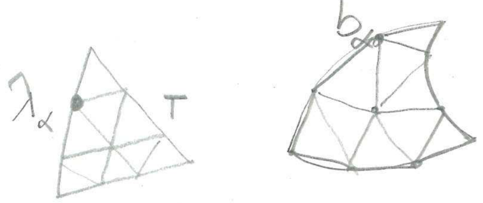
Bernsteinpolynom in 1D

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{N}_0^2$

$|\alpha| = k$

2.14 Def Zu $\{b_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1},\, |\alpha| = k} \subset \mathbb{R}^n$ (Bezierpunkte)

zugeordnet zu baryzentrischen Koordinaten $\lambda_\alpha = \frac{\alpha}{k}$ auf einem Referenzsimplex



d-dim. Polygonale Fläche im $\mathbb{R}^d$

— " — Bézier-Patch im $\mathbb{R}^d$

Bernsteinpolynom von Grad k über einem d-Simplex:

$$B_\alpha^k(\lambda) := \frac{k!}{\alpha!}\lambda^\alpha \qquad \left(\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_d^{\alpha_d},\ \alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_d!\right)$$

d-dim. Bézierpolynom im $\mathbb{R}^d$:

$$p(\lambda) = \sum_{|\alpha| = k} b_\alpha B_\alpha^k(\lambda)$$

2.15 Satz (Eigenschaften der Bernsteinpolynome)

(i) $\{B_\alpha^k\}_{|\alpha| \le k}$ nicht negative Teilung der 1 auf T

(ii) $$B_\alpha^k(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i B_{\alpha - e_i}^{k-1}(\lambda)$$

(mit Notation $B_\beta^\ell \equiv 0$ falls $\beta_m < 0$ für ein $0 \le m \le d$)

(iii) $\{B_\alpha^k(\lambda)\}_{|\alpha| \le k}$ Basis von $\mathcal{P}_k^d$.

Bew zu (i) nicht negativ auf T (✓)

$$(\lambda_0 + \cdots \lambda_d)^k \overset{\text{ü}}{=} \sum \frac{k!}{\alpha!}\lambda^\alpha$$

Aufgabe: wähle α_0 aus k aus, α_1 aus $k - |\alpha_0|$, α_2 aus $k - |\alpha_1| - |\alpha_2|$ usw.:

$$\frac{k \cdots (k - \alpha_0 + 1)}{\alpha_0!} \cdot \frac{(k - \alpha_0) \cdots (k - \alpha_0 - \alpha_1 + 1)}{\alpha_1!} \cdots \frac{1}{\alpha_d!}$$

zu (ii) $$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i B^{k-1}_{\alpha-e_i}(\lambda) = \underbrace{\sum_{i=0}^{d} \frac{(k-1)!\,\alpha_i}{\alpha!}}_{\frac{(k-1)!\sum_{i=0}^{d}\alpha_i}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha!}} \underbrace{\lambda^{\alpha-e_i}\lambda_i}_{\lambda^{\alpha}}$$

$$= B^k_\alpha(\lambda)$$

zu (iii) $$\dim \mathcal{P}^d_k = \binom{d+k}{k} = \operatorname{card} I_k$$

d.h. z.z. ist die lineare Unabh., d.h.

$$\sum \gamma_\alpha B^k_\alpha(\lambda) = 0 \Rightarrow \gamma_\alpha = 0 \ \forall_{|\alpha|=k}$$

$\boxed{\text{Induktion über } d \text{ \underline{und} } k}$

$\boxed{d=1}$ (<u>1D-Fall</u>: siehe oben) $\boxed{k=1}$ lineare FE (✓)

$\boxed{\text{1. Schritt}}$ $\boxed{(d-1,k) \wedge (d,k-d-1) \rightsquigarrow (d,k)}$

Betrachte $\{\lambda \mid \lambda_i = 0\}$ $(d-1)$ dim. Untersimplex, dort ist

$$\sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha B^k_\alpha(\lambda) = \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i=0}} \gamma_\alpha B^k_\alpha(\lambda) = 0$$

$$\overset{\text{Ind. Ann.}}{\Longrightarrow} \quad \gamma_\alpha = 0 \ \forall_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i=0}}$$

$\boxed{\text{2. Schritt}}$ <u>nun</u>: $$0 = \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha B^k_\alpha(\lambda) = \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i>0\ \forall i}} \gamma_\alpha B^k_\alpha(\lambda)$$

leere Summe, falls $k<d$ (fertig)

$$= \lambda_0 \cdots \lambda_d \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i>0\ \forall i}} \gamma_\alpha \underbrace{\frac{B^k_\alpha(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_d}}$$

$\boxed{B^k_\alpha(\lambda) \text{ enthält } \lambda_0 \cdots \lambda_d}$

$$= \underset{\substack{\neq \\ 0}}{c_\alpha} B^{k-(d+1)}_{\alpha-(1,\dots,1)}(\lambda)$$

$$\underset{\lambda_0 \cdots \lambda_d > 0 \text{ in } T}{\Longrightarrow} \quad 0 = \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i>0}} c_\alpha \gamma_\alpha B^{k-(d+1)}_{\alpha-(1,\dots,1)}(\lambda) \underset{\text{Ind. Ann.}}{\Rightarrow} \gamma_\alpha = 0 \ \forall_{|\alpha|=k}$$

□

2.16 Satz (De Casteljau-Schema)

Seien $b_\beta^r(\lambda) = \sum_{|\alpha|=r} b_{\beta\oplus\alpha} B_\alpha^r(\lambda)$ (partielle Polynome)

mit $\beta\oplus\alpha = (\beta_0 - \sum_{i=1}^d \alpha_i, \beta_1+\alpha_1, \ldots, \beta_d+\alpha_d)$

und $b_\beta \equiv 0$ für $\beta \not\geq 0$, dann gilt:

$$b_\beta^r(\lambda) = \sum_{i=0}^d \lambda_i\, b_{\beta\oplus e_i}^{r-1}(\lambda), \quad b_\beta^0 = b_\beta \quad \text{und}$$

$$p(\lambda) = b^k_{(k,0\ldots0)}(\lambda)$$

Bew

$$b_\beta^r(\lambda) \overset{2.15(ii)}{=} \sum_{|\alpha|=r} b_{\beta\oplus\alpha}\left(\sum_{i=0}^d \lambda_i B^{r-1}_{\alpha-e_i}(\lambda)\right)$$

$$\overset{\tilde\alpha=\alpha-e_i}{=} \sum_{i=0}^d \lambda_i \sum_{|\tilde\alpha|=r-1} b_{\underbrace{\beta\oplus(\tilde\alpha+e_i)}_{=(\beta\oplus e_i)\oplus\tilde\alpha}} B_{\tilde\alpha}^{r-1}(\lambda)$$

(mit Notation: $B_\gamma^{r-1} \equiv 0$ falls $\exists_i\ \gamma_i < 0$)

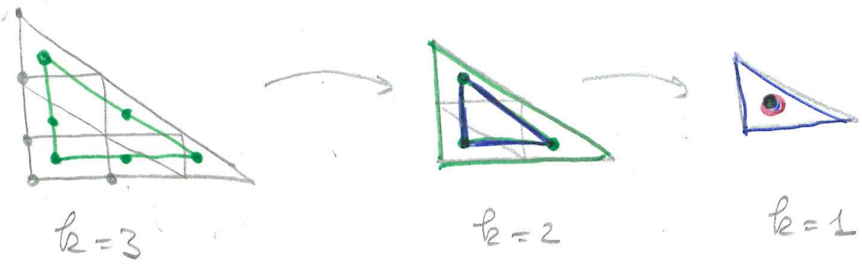
$$= \sum_{i=0}^d \lambda_i\, b^{r-1}_{\beta\oplus e_i}(\lambda)$$

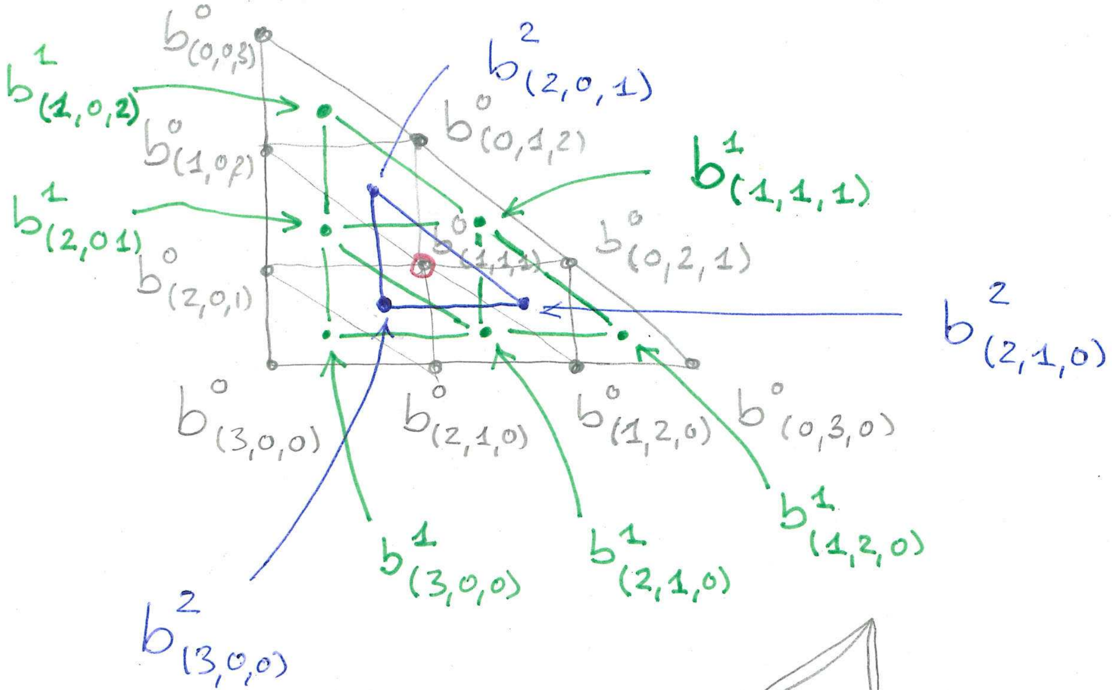
ferner: $(k,0\ldots0)\oplus\alpha = \alpha \Rightarrow$

$$p = b^k_{(k,0\ldots0)}(\lambda)$$

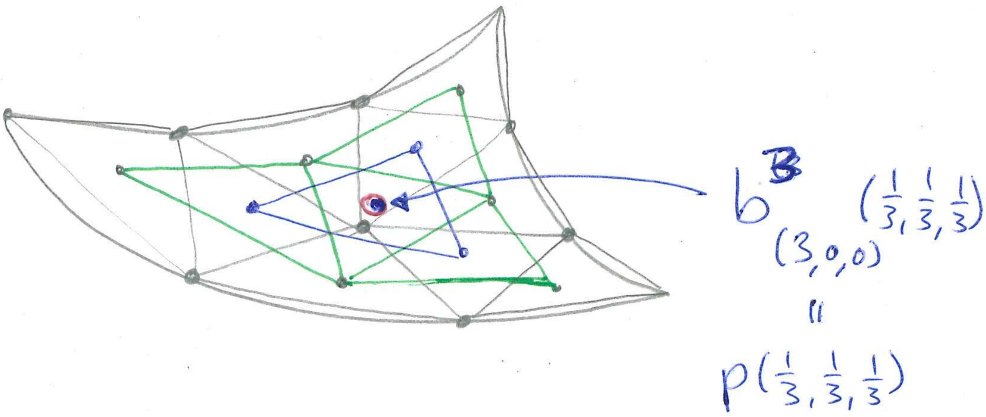
$\square$

Bsp $\boxed{d=2,\ n=3,\ k=3}$ (kubische Bézier-Patch)





$\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



3. Die Methode der Finiten Elemente

Literatur: Ciarlet The Finite Element Method for Elliptic Problems '80

Braess Finite Elemente '92

Brenner Scott The Mathematical Theory of Finite Element Methods '02

zunächst betrachten wir die analytischen und funktionalanalytischen Grundlagen:

Voraussetzung:
- Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$
- Lebesgue-integrierbare Funktionen

3.1. Eigenschaften von L^p-Funktionen (ohne Beweise)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen

$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ meßbar}, \|u\|_p < \infty \}$

$\|u\|_{p<\infty} := \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad \|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$

$= \inf_{\substack{N \subset \Omega \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)|$

$(u,v)_2 := \int_\Omega uv\, dx$ (Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$)

Hölderungleichung: $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 \le p \le \infty$ $\left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$

$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

3.2 Klassische Funktionenräume

$C^m(\overline{\Omega}) = \{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid f$ m-mal stetig differenzierbar mit stetig fortsetzbaren Ableitungen auf $\overline{\Omega} \}$

$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\beta| \le m} \|\partial^\beta f\|_\infty$

$$\text{höl}_\alpha(f) = \sup_{x,y\in\bar\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \qquad (\alpha = 1 \text{ Lipschitz})$$

$$C^{m,\alpha}(\bar\Omega) = \{ f \in C^m(\bar\Omega) \mid \text{höl}_\alpha(\partial^\beta f) < \infty \ \forall_{|\beta|=m} \}$$

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} = \|f\|_{C^m} + \sum_{|\beta|=m} \text{höl}_\alpha(\partial^\beta f)$$

Ziel (vgl. Wintersemester): Ableitungen in schwächerem Sinn

Betrachten wir die Regel der partiellen Integration:

$$\int_\Omega \partial_i u \, \varphi \, dx = -\int_\Omega u \, \partial_i \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} u \varphi n_i \, da$$

[Satz von Gauß für $\boxed{v = u\varphi e_i}$: $\int_\Omega \operatorname{div} v \, dx = \int_\Omega \partial_i u \, \varphi + u \, \partial_i \varphi \, dx$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| $

$\int_{\partial\Omega} v \cdot n \, da = \int_{\partial\Omega} u \varphi n_i \, da$]

Iterieren wir dies für $u \in C^m(\bar\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \partial^\beta u \, \varphi \, dx \underset{|\beta|\le m}{=} (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u \, \partial^\beta \varphi \, dx \qquad (|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_d)$$

3.3. Def (schwache Ableitung)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in L^p(\Omega)$ besitzt schwache Ableitungen $u^{(\beta)} \in L^p(\Omega)$, falls

$$\int_\Omega u \, \partial^\beta \varphi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u^{(\beta)} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(für $u^{(\beta)}$ schreiben wir auch $\partial^\beta u$)

Bem schwache Ableitungen sind eindeutig:

$u^{(\beta)}, \tilde u^{(\beta)}$ schw. Abl. $\Rightarrow \int_\Omega (u^{(\beta)} - \tilde u^{(\beta)}) \varphi \, dx = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow u^{(\beta)} = \tilde u^{(\beta)}$ f.ü. in Ω.

3.4. Bsp (i) $f: x \mapsto |x|$ auf $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} |x|\,\varphi'\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,\varphi'\,dx + \int_{0}^{1} x\,\varphi'\,dx$$

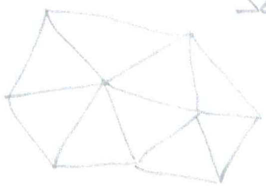
$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_{-1}^{0} 1\,\varphi\,dx + \underbrace{|x|\,\varphi(x)\Big|_{x=0}}_{=0} + \int_{0}^{1} -1\,\varphi\,dx - \underbrace{|x|\,\varphi(x)\Big|_{x=0}}_{=0}$$

$$= -\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = \operatorname{sgn}}$$

(ii) $u_h \in V_{k,h}$ (Lagrange Finite Elemente) haben schwache Abl.

$$\int_\Omega u_h \partial^i \varphi\,dx = \sum_{T\in \mathcal{J}_h} \int_T u_h\,\partial^i\varphi\,dx = \sum_{T\in\mathcal{J}_h}\Big(-\int_T \partial^i u_h\,\varphi\,dx + \int_{\partial T} u_h\,\varphi\, n_i\,dx \Big)$$

$$= -\int_\Omega \partial^i u_h\,\varphi\,dx + \sum_{\substack{T\cap\tilde T \\ T\neq \tilde T, \\ T\cap\tilde T\ (d-1)\text{ dim} \\ \text{Untersimplex}}} \underbrace{\frac{1}{2}\int_{T\cap\tilde T} u_h\,\varphi\,(n_i - n_i)\,dx}_{=0}$$



$$= -\int_\Omega \partial^i u_h\,\varphi\,dx$$

D.h. $\partial^i u_h$ (st.w. nur im Innern von Simplizes definiert) ist die schwache Ableitung von u_h

(iii) $x \mapsto u(x) = |x|^\gamma$ ist in $L^p(B_1) \Leftrightarrow \gamma > -\frac{d}{p}$, denn

$$\int_{B_1} |x|^{\gamma p}\,dx = |\partial B_1| \int_0^1 r^{\gamma p + (d-1)} = r^{\gamma p + d}\Big|_0^1 < \infty$$

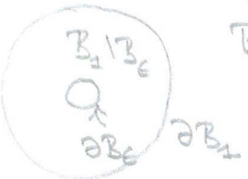
$$\Leftrightarrow \gamma p + d > 0$$

Kandidat für die schwache Ableitung:

$$\partial_i u(x) = \gamma |x|^{\gamma-2} x_i \in L^p \overset{\text{s.o.}}{\Longleftrightarrow} \gamma > 1 - \frac{d}{p}$$

z.z. $\displaystyle\int_{B_1} \partial_i u \, \varphi \, dx \overset{!}{=} - \int_{B_1} u \, \partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_1)$

hierzu: $\displaystyle\int_{B_1} |x|^\gamma \partial_i \varphi \, dx = \int_{B_1 \setminus B_\epsilon} |x|^\gamma \partial_i \varphi \, dx - \underbrace{\int_{B_\epsilon} |x|^\gamma \partial_i \varphi \, dx}_{|\cdot| \le \underbrace{C \epsilon^{\gamma+d} \|\partial_i \varphi\|_{\infty, B_1}}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 \;\leftarrow\; \boxed{\gamma > -d}\ (\mathrm{v})}}$



$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_{B_1 \setminus B_\epsilon} \gamma |x|^{\gamma-2} x_i \varphi \, dx - \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon} |x|^\gamma \varphi \, n_i \, da}_{|\cdot| \le \underbrace{C \epsilon^{\gamma+d-1} \|\varphi\|_{\infty, B_1}}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 \;\leftarrow\; \boxed{\gamma > 1-d}\ (\mathrm{v})}}$$

$$= \int_{B_1} \gamma |x|^{\gamma-2} x_i \varphi \, dx - \underbrace{\int_{B_\epsilon} \gamma |x|^{\gamma-2} x_i \varphi \, dx}_{|\cdot| \le \underbrace{C \epsilon^{\gamma-1+d} \|\varphi\|_{\infty, B_1}}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 \;\leftarrow\; \boxed{\gamma > 1-d}\ (\mathrm{v})}}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

3.5. **Def** (Sobolev-Raum)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$, dann ist

$$H^{m,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega) \mid u \text{ besitzt schwache Abl. } u^{(\beta)} \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \le |\beta| \le m \}$$

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\beta| \le m} \|u^{(\beta)}\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Skalarprodukt auf $H^{m,2}(\Omega)$:

$$(u,v)_{m,2} := \sum_{|\beta|\le m} \int_\Omega u^{(\beta)} v^{(\beta)}\,dx$$

Bem $\boxed{\begin{array}{l} H^{m,p} \text{ ist Banachraum (insbesondere abgeschlossen)} \\ H^{m,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}} \end{array}}$

3.6 Def ($H_0^{m,p}$)

$$\boxed{H_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}}$$

Bem
- $\mathcal{V}_{B,e} \subset H^{m,p}(\Omega)$
- $x \mapsto |x|^\gamma \in H^{1,p}(B_1) \overset{(s.o.)}{\Longleftrightarrow} \gamma > 1 - \frac{d}{p}$

($1-\frac{d}{p}$ nennt man Sobolev-Zahl zu $H^{1,p}$)

Frage: Man kann Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen in der Sobolev-Raum approximieren

(im inneren von Ω:

$u_\epsilon(x) = (\varphi_\epsilon * u)(x) = \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)\,u(y)\,dy$

mit $\varphi_\epsilon \ge 0$, $\operatorname{supp}\varphi_\epsilon = B_\epsilon$ (Faltung)

$\int_{B_\epsilon} \varphi_\epsilon(x)\,dx = 1$

z.B. $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ mit

$$\varphi(y) = \frac{\tilde\varphi(y)}{\int_{B_1}\tilde\varphi(z)\,dz}, \quad \tilde\varphi(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & ; |x|<1 \\ 0 & ; |x|\ge 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

3.7. Satz (Faltung) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, φ_ϵ wie oben, $1 \le p < \infty$

$u_\epsilon(x) = (\varphi_\epsilon * u)(x) = \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$, dann gilt $u_\epsilon \to u$ in $L^p_{loc}(\Omega)$, $u_\epsilon \in C^\infty$ auf $\{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) < \epsilon\}$

Bew (i) $|u_\epsilon(x)|^p = \left| \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy \right|^p = \left| \int_{B_\epsilon(x)} \underbrace{\varphi_\epsilon(z)}_{\varphi_\epsilon(z)^{\frac{1}{p}} \varphi_\epsilon(z)^{\frac{1}{p'}}} u(x+z)\, dz \right|^p$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Hölder

$$\le \underbrace{\left(\int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)^{\frac{p'}{p'}} dz \right)^{\frac{p}{p'}}}_{=1} \left(\int_{B_\epsilon(0)} |u(x+z)| \varphi_\epsilon(z)^{\frac{p}{p}} dz \right)^{\frac{p}{p}}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega' \subset\subset \Omega} |u_\epsilon(x)|^p dx \le \int_{\Omega'} \int_{B_\epsilon(0)} |u(x+z)|^p \varphi_\epsilon(z)\, dz\, dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z) \underbrace{\int_{\Omega' - z} |u(y)|^p dy}_{\le \|u\|^p_{L^p(B_\epsilon(\Omega'))}} dz \le 1 \cdot \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

(ii) $$|u_\epsilon(x) - u(x)| = \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\, (u(x+z) - u(x))\, dz$$

$$\le \underbrace{\sup_{|z| \le \epsilon} |u(x+z) - u(x)|}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0} \underbrace{\int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\, dz}_{=1}$$

$\boxed{u \in C^0(\Omega),\ dist(x, \partial\Omega) \ge \epsilon}$

D.h. $u \in C^0(\bar\Omega)$, dann konvergiert u_ϵ glm. gegen u auf $\Omega' \subset\subset \Omega$

(iii) L^p-Funktionen lassen sich durch $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen approximieren, d.h. $\exists\, \bar u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|u - \bar u\|_{L^p(\Omega)} \le \delta \quad \text{(ohne Beweis hier)}$$

$$\Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_{L^p(\Omega')} \le \underbrace{\|u - \bar u\|_{L^p(\Omega')}}_{\le \delta} + \underbrace{\|\bar u - (\bar u)_\epsilon\|_{L^p(\Omega')}}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0} + \|(\bar u)_\epsilon - u_\epsilon\|_{L^p(\Omega')}$$

$$\| \underbrace{(\bar{u})_\epsilon - u_\epsilon}_{=(\bar{u}-u)_\epsilon} \|_{L^p(\Omega')} \leq \|\bar{u} - u\|_{L^p(\Omega)} < \delta$$

□

3.8. Satz $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in H^{m,p}(\Omega)$, dann gilt $\|\varphi_\epsilon * u - u\|_{H^{m,p}(\Omega')} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega$

Bew (i) Wir zeigen für $B_\epsilon(\Omega') \subset \Omega$ und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ gilt $\varphi_\epsilon * u \in C^\infty(\Omega')$ und falls $\partial^\beta u \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitung von u, dann folgt $\partial^\beta(\varphi_\epsilon * u) = \varphi_\epsilon * \partial^\beta u$

klassische Abl. — schwache Ableitung

hierzu: $\boxed{x \in \Omega'}$

$$\partial^\beta_x (\varphi_\epsilon * u)(x) = \partial^\beta_x \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \int_\Omega \underbrace{\partial^\beta_x \varphi_\epsilon(x-y)}_{\in C^\infty_0} u(y)\, dy \longrightarrow \varphi_\epsilon * u \in C^\infty(\Omega') \text{ s.o.}$$

$$= (-1)^\beta \int_\Omega \partial^\beta_y \varphi_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy = \underbrace{(-1)^{2\beta}}_{=1} \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)\, \partial^\beta_y u(y)\, dy$$

Def. schwache Abl.

$$= (\varphi_\epsilon * \partial^\beta u)(x)$$

(ii) (3.7) $\Rightarrow$ $\partial^\beta(\varphi_\epsilon * u) - \partial^\beta u = \varphi_\epsilon * \partial^\beta u - \partial^\beta u \xrightarrow[L^p(\Omega')]{} 0$

$\Rightarrow$ Beh

□

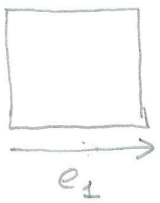
Bem: tatsächlich gilt s.o.

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}$$

3.9 Satz (Spursatz)

Ω offen mit Lipschitzrand, dann gibt es eine lineare, beschränkte Abb. $B: H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit $Bu = u$ auf $\partial\Omega$ für $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Bew (für $\Omega = [0,1]^d$)



zunächst $u \in C^\infty(\Omega)$:

$$|u(s_1, x_{2-d}) - u(s_2, x_{2-d})| = \left| \int_{s_1}^{s_2} \partial_1 u(s, x_{2-d})\, ds \right|$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]^{d-1}} |u(s_2, x_{2-d}) - u(s_1, x_{2-d})|^p \, dx_{2-d}$$

$$\leq \int_{[0,1]^{d-1}} \left| \int_{s_1}^{s_2} 1 \cdot \partial_1 u \, ds \right|^p dx_{2-d} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{[0,1]^{d-1}} |s_2 - s_1|^{\frac{p}{p'}} \int_{s_1}^{s_2} |\partial_1 u|^p \, ds \, dx_{2-d}$$

$$\Rightarrow \|u(s_2, \cdot) - u(s_1, \cdot)\|_{L^p([0,1]^{d-1})} \leq \underbrace{|s_2 - s_1|^{\frac{p-1}{p}}}_{\xrightarrow[s_1, s_2 \to 0]{} 0} \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p([s_1, s_2] \times [0,1]^{d-1})}}_{\xrightarrow[s_1, s_2 \to 0]{} 0}$$

$\Rightarrow$ $u(s, \cdot)$ ist Cauchy-Folge in $L^p([0,1]^{d-1})$ $(p > 1)$ $\leftarrow$ $\boxed{\text{wichtig für } p = 1}$

$\overset{\text{Fischer-Riesz}}{\Rightarrow}$ $u(s, \cdot) \to v(\cdot)$ in $L^p([0,1]^{d-1})$

$$v(\cdot) \overset{!!}{=} Bu$$

offensichtlich $Bu = u$ für $u \in C^0(\bar{\Omega})$

$$\|Bu\|_{L^p([0,1]^{d-1})} = \lim_{s \to 0} \|u(s, \cdot)\|_{L^p([0,1]^{d-1})}$$

$$= \lim_{s \to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h \|u(s, \cdot) - u(\xi, \cdot)\|_{L^p([0,1]^{d-1})} + \|u(\xi, \cdot)\|_{L^p([0,1]^{d-1})} \, d\xi}_{} \Bigg)$$

$$\leq \int_0^h \underbrace{\frac{(s-\xi)^{\frac{p-1}{p}}}{h}}_{\leq C(h)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \underbrace{\frac{h^{\frac{p-1}{p}}}{h}}_{h^{-\frac{1}{p}}} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq C(h) \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \Rightarrow B \text{ beschränkt} \quad \square$$

Bem Ω Lipschitz, offen, dann gilt mit 3.8.

$$H^{1,p}_0(\Omega) = \{u \in H^{1,p}(\Omega) \mid Bu = 0\} \subsetneq H^{1,p}(\Omega)$$

3.9. **Def**

$1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$

$$H^{-m,p'}(\Omega) := \left(H^{m,p}_0(\Omega)\right)' \qquad \|f\|_{H^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in H^{m,p}_0(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{<f,u>}{\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}}$$

!

Bsp

- $\tilde{f} \in L^{p'}(\Omega)$

$$<f,u> := \int_\Omega \tilde{f} u \, dx \Rightarrow |<f,u>| \le \|\tilde{f}\|_{L^{p'}(\Omega)} \underbrace{\|u\|_{L^p(\Omega)}}_{\le \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow f \in H^{-m,p'}(\Omega)$$

- $$<f,u> := \int_\Omega \partial^\beta u \, \tilde{f} \, dx \le \|u\|_{|\beta|,p} \|\tilde{f}\|_{p'} \Rightarrow f \in H^{-|\beta|,p'}(\Omega)$$

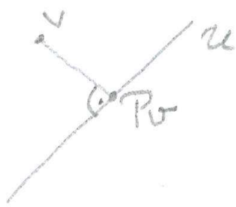
- $\tilde{f} \in L^{p'}(\partial\Omega)$, Ω Lipschitzrand, $u \in H^{1,p}(\Omega)$:

$$<f,u> := \int_{\partial\Omega} \tilde{f} u \, da \le \|\tilde{f}\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \underbrace{\|Bu\|_{L^p(\partial\Omega)}}_{\le C' \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow f \in \left(H^{1,p}(\Omega)\right)' \subsetneq H^{-1,p'}(\Omega)$$

Nun betrachten wir die Existenz schwacher Lösungen ellipt. Dgl'n:

3.10 **Satz** (Projektionssatz) Sei $\mathcal{U}$ abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{V}$ und $v \in \mathcal{V}$, dann gibt es genau ein $P(v) \in \mathcal{U}$ mit $\|v - Pv\| = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|v - u\|$.
Ferner ist P lineare, beschränkte Abbildung $V \to \mathcal{U}$ und
$v - Pv \perp \mathcal{U}$



Bew: $(p_k)_k \subset \mathcal{U}$ Minimalfolge, d.h. $\|v - p_k\| \to d := \inf_{u \in \mathcal{U}} \|v-u\|$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Parallelogrammregel}\\ \|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)\end{array}}$

$\hookrightarrow$

$a = v - p_k$
$b = v - p_\ell$

$$\|p_k - p_\ell\|^2 = -\underbrace{\|2v - (p_k + p_\ell)\|^2}_{=4\underbrace{\left\|v - \frac{p_k+p_\ell}{2}\right\|^2}_{\geq d^2}} + 2\Big(\underbrace{\|v - p_k\|^2}_{\to d^2} + \underbrace{\|v - p_\ell\|^2}_{\to d^2}\Big)$$

$$\Rightarrow \|p_k - p_\ell\| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$$

$\mathcal{U}$ abgeschl. $\Rightarrow \exists p \in \mathcal{U}$ mit $p_k \to p$

$\boxed{\text{Eindeutigkeit}}$ $\bar p \in \mathcal{U}$ mit $\|\bar p - v\| = d \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow}$

$$\|\bar p - p\|^2 \leq -4d^2 + 2(d^2 + d^2) = 0 \Rightarrow \bar p = p$$

$\boxed{\text{Orthogonalität}}$ $\tau \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$d^2 \leq \|v - (\underbrace{p + \alpha\tau}_{\in \mathcal{U}})\|^2 = \underbrace{\|v-p\|^2}_{=d} - 2\alpha(v-p,\tau) + \alpha^2\|\tau\|^2$$

$$\Rightarrow (v - p, \tau) \leq \alpha\|\tau\|^2 \;\forall \alpha > 0 \quad \Rightarrow (v-p,\tau) = 0$$

$\boxed{P(v) := p}$ wir zeigen $v - Pv \perp \mathcal{U}$ ist eindt. Charakterisierung ⊛

$$\left.\begin{array}{l}(v-p,u) = 0\\ (v-\bar p, u) = 0\end{array}\right\} (p - \bar p, u) = 0 \underset{u = p-\bar p}{\Rightarrow} p = \bar p$$

$\boxed{\text{Linearität}}$

$$\left.\begin{array}{l}(v_1 - P(v_1), u) = 0\\ (v_2 - P(v_2), u) = 0\end{array}\right\} (v_1 + \alpha v_2 - (P(v_1) + \alpha P(v_2)), u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

$$\overset{⊛}{\Rightarrow} P(v_1) + \alpha P(v_2) = P(v_1 + \alpha v_2)$$

$\square$

3.11 Satz (Riesz'scher Darstellungssatz)

Sei V Hilbertraum, $\ell \in V'$ (beschränktes, lineares Funktional), dann existiert genau ein $u \in V$, so dass

$$(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

Ferner gilt $\|u\|_V = \|\ell\|_{V'}$.

Bew $N = \{ v \in V \mid \ell(v) = 0 \}$ o.B.d.A. $N \neq V$

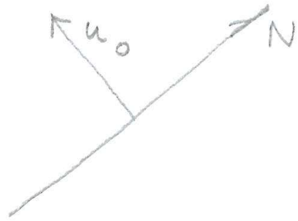
N ist abgeschlossener Unterraum ($N \ni v_k \to v \Rightarrow \ell(v_k) = 0 \Rightarrow \ell(v) = 0 \Rightarrow v \in N$)

3.10 $\Rightarrow$ [$\exists\, u_0 \neq 0 \quad u_0 \perp N$ d.h. insbesondere $\ell(u_0) \neq 0$

hierzu wähle $v \in V$ mit $v \notin N$ und $u_0 = v - Pv$]

nun: $\ell\Big(\underbrace{v - \frac{\ell(v)}{\ell(u_0)} u_0}_{=:\, w}\Big) = 0 \quad \Rightarrow w \in N$

($v \in V$ bel.) $\qquad \Rightarrow (u_0, w) = 0$



$$\Rightarrow (u_0, v) = \frac{\ell(v)}{\ell(u_0)} \|u_0\|^2$$

Nun wähle $u = \frac{\ell(u_0)}{\|u_0\|^2} u_0 \Rightarrow (u,v) = \frac{\ell(u_0)}{\|u_0\|^2} \frac{\|u_0\|^2}{\ell(u_0)} \ell(v) = \ell(v)$

$\boxed{\text{Abschätzung}}$

$$(u,u) = \ell(u) \Rightarrow \|u\|_V^2 \leq \|\ell\|_{V'} \|u\|_V$$

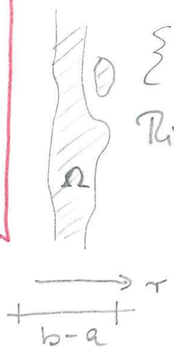
$$\Rightarrow \|u\|_V \leq \|\ell\|_{V'}$$

$$\|\ell\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V} = \sup \frac{(u,v)}{\|v\|_V} \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sup_{v \neq 0} \|u\|_V \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = \|u\|_V$$

$\boxed{\text{Eindeutigkeit}}$ $\left.\begin{array}{l} (u,v) = \ell(v) \\ (\bar{u},v) = \ell(v) \end{array}\right\} (u - \bar{u}, v) = 0 \;\forall v \in V \underset{v = u - \bar{u}}{\Rightarrow} \|u - \bar{u}\| = 0$ $\square$

Ein weiteres Hilfsmittel:

3.12 Satz (Poincaré-Ungleichung)



Ω offen, $p < \infty$, es gebe Richtung $\tau \in \mathbb{R}^d$, $\|\tau\| = 1$, so dass $\{\tau \cdot x \mid x \in \Omega\} \subset [a,b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ (Ω in einer Richtung beschränkt), dann gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

mit $C_p = b-a$.

Bew o.B.d.A $\tau = e_1$, $\{x_1 \mid x \in \Omega\} \subset [0,b]$;

nun setze man u durch 0 fort, dann gilt

$$u(x_1, x_{2-d}) = \int_0^{x_1} \partial_1 u(\xi, x_{2-d})\, d\xi \quad \Rightarrow$$

$$\int_\Omega |u|^p dx = \int_\Omega \left(\int_0^{x_1} 1 \cdot \partial_1 u(\xi, x_{2-d})\, d\xi \right)^p dx$$

$$\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq}} \int_\Omega \int_0^b |\partial_1 u|^p d\xi \; b^{\frac{p}{p'}} dx$$

$$\boxed{\frac{p}{p'} = \frac{p-1}{p}\, p = p-1} \quad = \; b^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^d |\partial_1 u|^p d\xi \, dx_1 \, dx_{2-d}$$

$$= b^{p-1+1} \int_\Omega |\partial_1 u|^p dx = d^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

$(\,.\,)^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow$ Beh

$\square$

Betrachte nun das Poissonproblem:

(E) klassische Formulierung: $-\Delta u = f$ in Ω
$u = g$ auf $\partial\Omega$

$$\xrightarrow{\int_\Omega (-)dx} \quad \underbrace{\int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx}_{} = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\underset{\text{part. Integration}}{=} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx$$

($\tilde{E}$) schwacher Lösungsbegriff:

Sei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1,2}(\Omega)$, dann heißt u schwache Lösung zu (E), falls $u \in H^{1,2}(\Omega)$, $u - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

3.13 Satz (Existenz schwacher Lösungen)

Es existiert eine eindeutige schwache Lösung u des Poissonproblems ($\tilde{E}$).

Bew Gesucht $u = w + g$ mit $w \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla(w+g) \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx}_{=: a(w,\varphi)} = \underbrace{\int_\Omega f\varphi - \nabla g \cdot \nabla \varphi \, dx}_{=: \ell(\varphi)}$$

Z.z. (i) $H_0^{1,2}$ ist mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ und induzierter Norm $|w|_{1,2} := \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ ein Hilbertraum

(ii) $\ell(\cdot)$ ist ein beschränktes lineares Funktional

$\boxed{\text{zu (i)}}$ $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p |w|_{1,2} \Rightarrow$

$$\|w\|_{H^{1,2}(\Omega)} = \left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + C_p |w|^2_{1,2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{1 + C_p^2}\ |w|_{1,2}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_{H^{1,2}(\Omega)}$ und $|w|_{1,2}$ sind äquivalente Normen

Ferner ist $a(\cdot,\cdot)$ bilinear und symmetrisch

Also ist $H_0^{1,2}$ auch mit dem SKP $a(\cdot,\cdot)$ Hilbert-Raum

$\boxed{\text{zu (ii)}}$ $|\ell(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + |g|_{1,2} |\varphi|_{1,2}$

$$\leq \left(C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} + |g|_{1,2} \right) |\varphi|_{1,2}$$

$\Rightarrow$ ℓ ist beschränktes, lineares Funktional

$$\overset{3.11.}{\underset{(i),(ii)}{\Longrightarrow}} \quad \exists!\, w \in H_0^{1,2}(\Omega) \text{ mit } a(w,\varphi) = \ell(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

□

3.14 Bem (Verallgemeinerungen)

(i) $Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + a_0 u$ (allgemeiner ellipt. Operator)

mit $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $a_{ij} \xi_j \xi_i \geq c |\xi|^2$

mit $c > 0$, sowie $a_0 \geq 0$, $a_{ij} = a_{ji}$

(E) $Lu = f$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$ (vgl. oben)

Schwacher Lösungsbegriff: (partielle Integration für a, u hinreichend glatt)

$$(\tilde{E}) \qquad a(w,\varphi) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi + a_0 u\varphi\,dx$$

$$\ell(\varphi) := \int_\Omega f\varphi - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j g\,\partial_i\varphi\,dx$$

$u = w + g$ heißt schwache Lösung zu (E) falls

$$a(w,\varphi) = \ell(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

(ii) (Neumann-Randwerte)

$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$$

$$(E_N) \qquad \begin{aligned} Lu &= f \text{ in } \Omega & f &\in L^2(\Omega)\\ u &= g \text{ auf } \Gamma_D & g &\in H^{1,2}(\Omega)\\ \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j u\, n_i &= \gamma \text{ auf } \Gamma_N & \gamma &\in L^2(\partial\Omega)\end{aligned}$$

a, u glatt $\Rightarrow$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d -\partial_i(a_{ij}\,\partial_j u)\,\varphi\,dx \overset{\text{partielle Integration}}{=} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j u\, n_i\,da$$

$\rightsquigarrow$ Schwacher Lösungsbegriff:

$$(\tilde{E}_N) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\Gamma_N}\gamma\varphi\,da \qquad \forall \varphi \in H^{1,2}(\Omega) \text{ mit } \varphi|_{\Gamma_D} = 0$$

[hier benötigt man entweder

$a_0(x) \geq c > 0$ f.ü. in Ω $\Rightarrow$ Poincaré Ungl. nicht notwendig

oder Poincaré-Ungl.

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } w \in H^{1,2}(\Omega) \text{ mit } w|_{\Gamma_D} = 0$$

Nun betrachten wir zu (E) einen konformen Finite-Elemente-Ansatz:

Sei $V_h \subset V = H^{1,2}(\Omega)$ endlich dimensionaler Teilraum,

$V_{h,0} := \{ w \in V_h \mid w_h = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}$, dann suchen wir $w_h \in V_{h,0}$ mit

$(\tilde{E}_h) \qquad a(w_h, \varphi_h) = \ell(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,0}$

Dabei sei $\ell(\varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dx - a(g_h, \varphi)$ zu $g_h \in V_h$

$\boxed{u_h = w_h + g_h}$ heißt dann diskrete Lösung zu (E) falls g_h eine Approximation von $g \in H^{1,2}(\Omega)$.

3.15. Satz (Existenz diskreter Lösungen)

Vor wie oben, dann existiert genau eine Lösung $u_h \in V_h$ zu $(\tilde{E}_h)$

Bew: Analog zu 3.13 (Es genügt Projektionssatz in endl. Dimension) vgl. WS 15/16. $\square$

Lineares Gleichungssystem hinter $(\tilde{E}_h)$:

$$w_h = \sum_{k=1}^{m} w_h^k \varphi_h^k \qquad m = \dim V_{h,0}, \ \{\varphi_h^k\}_{k=1,\dots,m} \text{ Basis}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \underbrace{a(\varphi_h^k, \varphi_h^\ell)}_{=: A_h^{\ell k}} w_h^k = \underbrace{\ell(\varphi_h^\ell)}_{=: \bar{\ell}_h^\ell} \qquad \forall \ell = 1,\dots,m$$

$A_h = (A_h^{\ell k})_{\ell,k=1,\dots,m}$ Steifigkeitsmatrix

$\bar{\ell}_h = (\ell_h(\varphi_h^k))_{k=1,\dots,m}$ Rechte Seite

$\bar{w}_h = (w_h^k)_{k=1,\dots,m}$ Komponentenvektor zu w_h

$$\boxed{A_h \bar{w}_h = \bar{\ell}_h}$$

Nun verwenden wir Lagrange-Finite-Elemente:

$$V_h = V_{h,k} \quad \text{aus } 2.12.$$

Frage: Fehlerabschätzungen $\|u-u_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq ?$, $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ?$

Abstrakte Fehlerabschätzung (vgl. Wintersemester):

3.16 Lemma (Céa) Sei V Hilbertraum, $V_h \subset V$ abgeschlossener Unterraum, $\ell \in V'$, $a(\cdot,\cdot)$ beschränkte, koerzive Bilinearform ($a(u,u) \geq c\|u\|_V^2$, $a(u,v) \leq C_1\|u\|_V\|v\|_V$) dann gilt für u, u_h mit

$$a(u,\varphi) = \ell(\varphi) \ \forall \varphi \in V \quad \text{und} \quad a(u_h,\varphi_h) = \ell(\varphi_h) \ \forall \varphi_h \in V_h$$

die Fehlerabschätzung

$$\underbrace{\|u-u_h\|_V}_{\text{(FE-Fehler)}} \leq \frac{C_1}{c} \underbrace{\inf_{v_h \in V_{h,0}} \|u-v_h\|_V}_{\text{(Approximationsfehler)}}$$

Bew

$$\|u-u_h\|_V^2 \leq \frac{1}{c}\, a(u-u_h, u-u_h)$$

$$= \frac{1}{c}\Big(a(u-u_h, u-v_h) + \underbrace{a(u-u_h, v_h-u_h)}_{\substack{\ell(v_h-u_h)-\ell(v_h-u_h) \\ = 0}}\Big)$$

$$\leq \frac{C_1}{c}\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V$$

$= 0$
Orthogonalität des Fehlers

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_V \leq \frac{C_1}{c}\|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$$

$\Rightarrow$ Beh

$\square$

Ziel: $\inf\limits_{v_h \in V_{h,k}} \|u - v_h\| \leq \|u - I_h u\| \overset{!}{\leq} C_1 h^k \|u\|_{H^{k+1,2}(\Omega)}$

Lagrange-Interpolation $H^{k+1,2}(\Omega) \hookrightarrow V_{h,k}$ — Regularität!

Fragen:
- Wohldefiniertheit von I_h auf Sobolev-Räumen?
- Fehlerabschätzung in Sobolev-Normen?
  (vgl. 2.13 Fehlerabschätzung in der $\|.\|_\infty$-Norm)

Hilfsmittel: Poincaré-Abschätzung $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$
für $u \in H^{1,p}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u\,dx = 0$, Ω beschränkt

(bisher für $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$)

1D $\int_a^b u\,dx = 0 \Rightarrow \exists_{x \in [a,b]}\ u(x) = 0 \Rightarrow$

$u(y) = \underbrace{u(x)}_{=0} + \int_x^y u'(\xi)\,d\xi$, danach weiter wie bisher!

Achtung: Dies geht nicht so für $d > 1$

3.18 Satz (Poincaré-Abschätzung für Funktionen mit Mittelwert 0)

$1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, dann gilt für alle $u \in H^{1,p}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u\,dx = 0$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

zunächst:

3.19 Lemma $f \in L^p(\Omega)$, $g(x) = \int_\Omega |x-y|^{1-d} f(y)\,dy$, dann gilt $g \in L^p(\Omega)$ mit $\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$

Bem $\displaystyle\int_{B_1(0)} |x|^{1-d}\,dx = |\partial B_1| \int_0^1 r^{1-d+d-1}\,dx = |\partial B_1|\, r\Big|_0^1 = |\partial B_1|$

$\longrightarrow$ schwach singulärer Kern!

Bew zu 3.19: $\boxed{d=1}$ (✓)

$\boxed{d>1}$ $\displaystyle \|g\|_{L^p}^p = \int_\Omega \left(\int_\Omega |x-y|^{(1-d)\delta} f(y)\, |x-y|^{(1-d)(1-\delta)}\, dy \right)^p dx$

$$\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{\overset{\text{Hölderungl.}}{\leq}} \int_\Omega \left(\int_\Omega |x-y|^{(1-d)\delta p} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{p}{p}} \left(\int_\Omega |x-y|^{(1-d)(1-\delta)\frac{p}{p-1}}\, dy \right)^{\frac{(p-1)p}{p}} dx$$

$$\underset{\boxed{\text{Fubini}}}{\leq} \underbrace{\left(\sup_{y\in\Omega} \int_\Omega |x-y|^{(1-d)\delta p}\, dx \right)}_{\underset{\boxed{(1-d)\delta p > -d}\ (*)}{\leq C(\Omega)}} \|f\|_{L^p}^p \underbrace{\left(\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |x-y|^{\frac{(1-d)p(1-\delta)}{p-1}}\, dy \right)^{p-1}}_{\underset{\boxed{\frac{(1-d)p(1-\delta)}{p-1} > -d}\ (**)}{\leq C(\Omega)}}$$

$$\Leftrightarrow\ -(1-d)p\delta > \underbrace{-(p-1)d-(1-d)p}_{=d-p}$$

$$\underset{\boxed{\underbrace{\frac{d-p}{(d-1)p}}_{<1} \overset{(**)}{<} \delta \overset{(*)}{<} \underbrace{\frac{d}{(d-1)p}}_{>0}}}{\leq} C(\Omega)^2 \|f\|_{L^p}^p$$

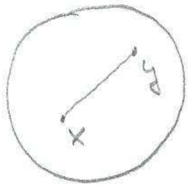
$\leftarrow$ immer erfüllbar für ein $\delta \in (0,1)$

$\square$

Bew zu 3.18: o.B.d.A $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

(möglich wegen Approximierbarkeit)

[Ferner setzen wir hier voraus, dass Ω konvex ist!]



$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \partial_t\, u(y + t(x-y))\, dt$$

$$= \int_0^{|x-y|} \partial_t\, u(y + t\xi)\, dt \qquad \xi = \frac{x-y}{|x-y|}$$

$$\Rightarrow \quad -u(y)\,|\Omega| = \underbrace{\int_\Omega u(x)}_{=0} - u(y)\, dx = \int_\Omega \int_0^{|x-y|} \underbrace{\partial_t\, u(y+t\xi)}_{=\, v(y+t\xi)}\, dt\, dx$$

$R \geq \mathrm{diam}(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad |u(y)| \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{B_R} \int_0^\infty |v(y+t\xi)|\, dt\, dx$$

$\boxed{v(x) := 0 \text{ für } x \notin \Omega}$

$$\underset{\boxed{\text{Fubini}}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_0^\infty \int_0^R \int_{\partial B_1} |v(y+t\xi)|\, r^{d-1}\, da\, dr\, dt$$

$$= \frac{R^d}{|\Omega| d} \int_0^\infty \int_{\partial B_1} |v(\underbrace{y+t\xi}_{=:z})|\, \frac{t^{d-1}}{t^{d-1}}\, da(\xi)\, dt$$

$$\underset{t=|z-y|}{=} \underbrace{\frac{R^d}{|\Omega| d} \int_{\cancel{\mathbb{R}^d}\ \Omega} \frac{|v(z)|}{|z-y|^{d-1}}\, dz}_{=:\, g(y) \text{ in Lemma 3.19.}}$$

$\overset{3.19}{\Rightarrow}$

$$\|u\|_{L^p} \leq C(\Omega)\, \|v\|_{L^p} \underset{|v(z)| \leq |\nabla u(z)|}{\leq} C(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^p} \rightsquigarrow \text{Beh.}$$

□

$\boxed{\Omega \text{ nicht konvex}}$ man benötigt einen Fortsetzungssatz:

$$\exists E : H^{1,p}(\Omega) \to H_0^{1,p}(B_{2R}) \text{ mit}$$

$$\|Eu\|_{H^{1,p}(B_{2R})} \leq C\, \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

dann greift andere Argumentation!

zu 1. Frage: Wohlgestelltheit der Interpolation von Sobolev-Funktionen?

zunächst nur f.ü. def.

Erinnerung: $u(x) = |x|^{\gamma}$

$\boxed{\alpha = 1}$ Sonderfall

$$u \in C^{k,\alpha}(B_1) \Leftrightarrow k+\alpha \leq \gamma \qquad \left(\begin{array}{l} x \mapsto |x|^{\alpha} \in C^{0,\alpha} \\ x \mapsto |x|^{1+\alpha} \in C^{1,\alpha} \end{array} \right)$$

Hölderstetigkeit

$$u \in H^{m,p}(B_1) \Leftrightarrow \gamma > m - \frac{d}{p} \qquad (\text{vgl. } 3.4.(iii))$$

$$D^m |x|^{\gamma} = O(|x|^{\gamma -})$$

insbesondere: $\gamma > m - \frac{d}{p} \geq k + \alpha \Rightarrow u \in C^{k,\alpha}$

Dies gilt allgemein:

3.20 Satz (Einbettung $H^{m,p} \hookrightarrow C^{k,\alpha}$)

Sei Ω offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, $k, m \geq 0$; $1 \leq p, q < \infty$, $\alpha \in [0,1]$, dann gilt:

$H^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ falls $m - \frac{d}{p} > k + \alpha$ ($\geq$, falls $\alpha \in (0,1)$)

$H^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow H^{k,q}(\Omega)$ falls $m \geq k$ und $m - \frac{d}{p} \geq k - \frac{d}{q}$

[$X \overset{E}{\hookrightarrow} Y :\Leftrightarrow$ E beschränkter Operator $X \to Y$, E injektiv

falls E kanonisch, so schreibt man $X \hookrightarrow Y$]

(ohne Beweis hier)

Bem L^p-Funktionen sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich bis auf Nullmenge nicht unterscheiden.

$H^{m,p} \hookrightarrow C^{k,\alpha}$ heißt damit, dass es einen Repräsentanten jeder $H^{m,p}$-Fkt gibt, der $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ist!

$I_h u$ - Auswertung erfordert $u \in C^0$, d.h. u muss regulär genug sein: $u \in H^{m,2}(\Omega) \Rightarrow u \in C^0(\bar{\Omega})$

falls $m - \frac{d}{2} > 0$

$H^{1,2}(\Omega) \underset{d>1}{\not\hookrightarrow} C^0(\bar{\Omega})$! $\rightsquigarrow$ höhere Regularität erforderlich!

Nun zur Interpolation in Sobolev-Räumen:

$\boxed{\text{Ziel}}$ $\quad \|u - I_h u\|_{H^{m,2}(\Omega)} \leq C_1 h^{k+1-m} \|u\|_{H^{k+1,2}(\Omega)}$

$m = 1$
$m = 0 \ (L^2)$

3.21. Lemma T Simplex, $\hat{T}$ Referenzsimplex,

$T = F(\hat{T})$, $F: \hat{x} \mapsto A_T \hat{x} + b_T$, $A_T \in GL(d)$, $b_T \in \mathbb{R}^d$,

$m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\hat{u} = u \circ F$, dann gilt

$$|u|_{m,p,T} \leq C_1 \, |||A_T^{-1}|||^m (\det A_T)^{\frac{1}{p}} \, |\hat{u}|_{m,p,\hat{T}}$$

$$|\hat{u}|_{m,p,\hat{T}} \leq C_1 \, |||A_T|||^m (\det A_T)^{-\frac{1}{p}} \, |u|_{m,p,T}$$

$$\left[\ |u|_{m,p,T} := \left(\sum_{|\beta|=m} \int_T |\partial_x^\beta u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

Bem: $\hat{u}(\hat{x}) = u(F(\hat{x})) \Rightarrow \partial_{\hat{x}_i}\hat{u} = \sum_j (\partial_{x_j} u) \circ F \underbrace{\partial_{\hat{x}_i} F_j}_{A_{ji}}$

$$\Rightarrow |\partial_{\hat{x}}^{\alpha} \hat{u}(\hat{x})| \leq C_1 |||A_T|||^{|\alpha|} \max_{|\beta| = |\alpha|} |\partial_x^{\beta} u(x)|$$

$\boxed{p=\infty}$ $\quad |\hat{u}|_{m,\infty,\hat{T}} \leq C_1 |||A_T|||^m |u|_{m,\infty,T}$ (siehe Kap. 2)

$\boxed{p<\infty}$

$$\left(\int_{\hat{T}} |\partial_{\hat{x}}^{\alpha} \hat{u}(\hat{x})|^p d\hat{x}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 |||A_T|||^{|\alpha|} \max_{|\beta|=|\alpha|} \underbrace{\left(\int_{\hat{T}} |(\partial_x^{\beta} u) \circ F|^p d\hat{x}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$= |\det A_T^{-1}|^{\frac{1}{p}} \int_T |\partial_x^{\beta} u|^p dx$$

$\Rightarrow$ 2. Ungleichung

1. Ungleichung: Vertauschen Rollen von $T, \hat{T}$ $\square$

Erinnerung 2.13 (Beweis):

$$|||A_T||| \leq \frac{h(T)}{\varrho(\hat{T})} \qquad |||A_T^{-1}||| \leq \frac{h(\hat{T})}{\varrho(T)} \longleftarrow \text{Inkreisdurchmesser}$$

ferner gilt:
$$\boxed{\frac{\varrho(T)^d}{h(\hat{T})^d} \overset{!}{\leq} |\det A_T| \overset{!}{\leq} \frac{h(T)^d}{\varrho(\hat{T})^d}}$$

hierzu:

- $|||A_T^{-1} \varrho(T) e_i||| \leq h(\hat{T}) \Rightarrow |\det A_T^{-1}| \leq \dfrac{h(\hat{T})^d}{\varrho(T)^d}$

  $\Rightarrow |\det A_T| \geq \dfrac{\varrho(T)^d}{h(\hat{T})^d}$

- $|||A_T \varrho(\hat{T}) e_i||| \leq h(T) \Rightarrow |\det A_T| \leq \dfrac{h(T)^d}{\varrho(\hat{T})^d}$ $\square$

Bem: [3.21. dient der Transformation der Fehlerabschätzung auf T auf das Referenzsimplex $\hat{T}$]

Nun betrachten wir Fehlerabschätzungen auf $\hat{T}$!

3.22. Lemma $G \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt, dann existiert zu jedem $u \in H^{k,p}(G)$ ein $q \in \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^d$, so dass
$$\int_G \partial^\alpha (u-q)\,dx = 0 \quad \forall_{|\alpha| \le k}$$

Bew $q = \sum_{|\beta| \le k} c_\beta x^\beta$

$$\int_G \partial^\alpha (u-q)\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{|\beta| \le k} \left(\int_G \partial^\alpha x^\beta\,dx\right) c_\beta = \int_G \partial^\alpha u\,dx}$$

quadr. lineares Gl. system

z.z. Injektivität: $\int_\Omega \partial^\alpha q\,dx = 0 \quad \forall_{|\alpha| \le k} \overset{!}{\Rightarrow} q \equiv 0$

hierzu: $|\alpha| = k,\ q \in \mathcal{P}_k \Rightarrow \partial^\alpha q \equiv \text{konstant} \overset{\text{Vor.}}{=} 0$

$\Rightarrow q \in \mathcal{P}_{k-1}$

$\overset{\text{Iteration}}{\Longrightarrow} \dots\ q \in \mathcal{P}_0,\ q \equiv \text{konstant} \overset{\text{Vor}}{=} 0$

$\Rightarrow q \equiv 0$

□

3.23. Satz G offen, beschränkt, $k \ge 0$, $1 \le p \le \infty$, dann gilt
$$\|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathcal{P}_k} := \inf_{q \in \mathcal{P}_k} \|u-q\|_{H^{k+1,p}(G)} \le C(\Omega,k,p)\,|u|_{H^{k+1,p}(G)} \quad \forall u \in H^{k+1,p}(G)$$
Quotientenraum

Bew wähle q nach 3.21 mit $\int_G \partial^\alpha(u-q)\,dx = 0 \quad \forall_{|\alpha| \le k}$

$$\Rightarrow \|\partial^\alpha (u-q)\|_{L^p(G)} \le C_p(G)\,\|\partial^\alpha \nabla (u-q)\|_{L^p(G)}$$

Situation ⟶

$$\|u-q\|_{H^{k+1,p}(G)} \le C(G,k,p)\, \underbrace{|u-q|_{H^{k+1,p}(G)}}_{=|u|_{H^{k+1,p}(G)}}$$

$$\underset{q\in\mathcal{P}_k}{\vee\!\!/}\ \ \|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathcal{P}_k}$$

3.24 **Satz** (Interpolationsabschätzungen auf festem Gebiet)

G offen, beschränkt, $k \ge m \ge 0$, $p, q \ge 1$, $H^{k+1,p}(G) \hookrightarrow H^{m,q}(G)$
$\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P} \subset H^{m,q}(G)$, sei $I \in L(H^{k+1,p}(G), \mathcal{P})$, so dass
$Ip = p \ \forall p \in \mathcal{P}_k$, dann gilt ↑ (Raum der lin., besch. Operatoren)

$$\|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} \le C(G,k,m,p,q)\, |u|_{H^{k+1,p}(G)} \quad \forall u \in H^{k+1,p}(G)$$

Bew

$$\|u-Iu\|_{m,q} \underset{s\in\mathcal{P}_k}{=} \|u-s\|_{m,q} + \|s-Iu\|_{m,q}$$
$$= \|u-s\|_{m,q} + \|I(s-u)\|_{m,q}$$
$$\le \left(1 + |||I|||_{L(H^{k+1,p},\mathcal{P})}\right) \|u-s\|_{k+1,p}$$

$$\Rightarrow \|u-Iu\|_{m,q} \le C \inf_{s\in\mathcal{P}_k} \|u-s\|_{k+1,p}$$
$$\underset{3.22.}{\le} C\, |u|_{k+1,p}$$

□

Bem

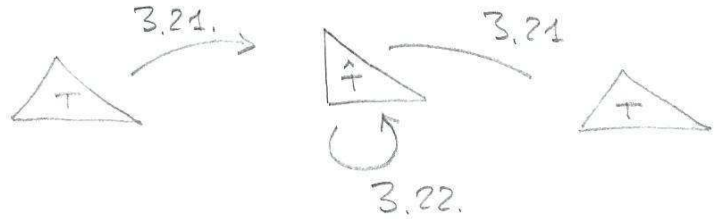
- $\mathcal{P}_k \subsetneq \mathcal{P}$ spezielle Finite Element ⟿ später relevant!
- $I = I_e \in L(H^{k+1,p}(G), \mathcal{P}) \Leftrightarrow H^{k+1,p} \hookrightarrow C^0$
- Anwendung $G = \hat{T}$

3.25 Satz (Interpolationsfehler auf Simplices)

T Simplex, $\hat{T}$ Einheitssimplex, $k, m \geq 0$, $p, q \geq 1$,
$H^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow H^{m,q}(\hat{T})$, $\hat{\mathcal{P}} \subset H^{m,q}(\hat{T})$,
$\hat{I} \in L(H^{k+1,p}(\hat{T}), \hat{\mathcal{P}})$, $\hat{I}s = s \quad \forall s \in \mathcal{P}_k$,
$I \in L(H^{k+1,p}(T), \mathcal{P})$ mit $\widehat{Iv} = \hat{I}\hat{v}$ $(\hat{v} = v \circ F_T)$
dann gilt
$$|u - Iu|_{H^{m,q}(T)} \leq C\, h(T)^{k+1+\frac{d}{q}}\, g(T)^{-m-\frac{d}{p}}\, |u|_{H^{k+1,p}(T)}$$

Bew $\boxed{p = q = \infty}$ (2.13)

Schema:



$$\begin{aligned}
|u - Iu|_{m,q,T} &\overset{3.21}{\leq} C\, g(T)^{-m}\, h(T)^{\frac{d}{q}}\, |\hat{u} - \underbrace{\widehat{Iu}}_{\hat{I}\hat{u}}|_{m,q,\hat{T}} \\
&\overset{3.22.}{\leq} C\, g(T)^{-m}\, h(T)^{\frac{d}{q}}\, |\hat{u}|_{k+1,p,\hat{T}} \\
&\overset{3.21.}{\leq} C\, g(T)^{-m-\frac{d}{p}}\, h(T)^{k+1+\frac{d}{q}}\, |u|_{k+1,p}
\end{aligned}$$
$\square$

3.26 Folgerung $\{\mathcal{J}_h\}_h$ Familie zulässiger, regulärer Triangulierungen, $V_{h,k}$ Lagrange-FE-Raum, $u \in H^{k+1,p}(\Omega)$, $H^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, dann gilt
$$|u - I_h u|_{m,p,\Omega} \leq C\, h^{k+1-m}\, |u|_{k+1,p,\Omega} \quad (m = 0, 1)$$

Bew
- Summation über alle Simplizes
- $g(T) \geq C\, h(T)$

$\square$

Bem

- Falls $\varrho(T) \leq C\, h(T)$:

$$|u - Iu|_{m,q,T} \leq C\, h(T)^{k+1-m+d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} |u|_{k+1,p,T}$$

kein Profit „auf ganz Ω" falls $q < p$

- $V_h \subset H^{m,p} \Leftarrow C^{m-1}$-Übergänge auf $T \cap T'$

- Für Hermit-Elemente (Freiheitsgrade $\hat{=}$ Ableitungen der Ordnung $s \geq 0$):

$$I \in L(H^{k+1,p}(\hat{T}), \hat{\mathcal{P}}) \Leftarrow H^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow C^{s_{max},0}(\hat{T})$$

$k+1-\frac{d}{p} > s_{max} :=$ maximaler Ableitungsgrad

Nun betrachten wir die Konvergenz der Finiten-Elemente-Methode:

$$(\tilde{E}) \quad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_j u\, \partial_i \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$$u - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$$(\tilde{E}_h) \quad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_j u_h\, \partial_i \varphi_h \, dx = \int_\Omega f \varphi_h \, dx \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0}$$

$$u_h - g_h \in V_{h,k,0}$$

$V_{h,k,0} = V_{h,k} \cap \{ u_h|_{\partial\Omega} = 0 \}$, Ω polygonal berandet, beschränkt, $(\mathcal{T}_h)_h$ Familie regulärer, zulässiger Triangulierungen,

3.26 Satz (Konvergenz)

Unter obigen Voraussetzungen und für u Lsg von $(\tilde{E})$ gelte $u \in H^{k+1,2}(\Omega)$, $k+1-\frac{d}{2} > 0$, $g_h = I_h g$ auf $\partial\Omega$, dann gilt für u_h Lsg von $(\tilde{E}_h)$: $\|u - u_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq C\, h^k |u|_{k+1,2,\Omega}$

Bew $\boxed{g = g_h}$ $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_j u\, \partial_i v \, dx$

$$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx - a(\underset{\llcorner\, g_h}{g}, v)$$

$$(\tilde{E}) \Leftrightarrow a(w,\varphi) = \ell(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \qquad w = u - g$$

$$(\tilde{E}_h) \Leftrightarrow a(w_h,\varphi_h) = \ell(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0} \qquad w_h = u_h - g_h = u_h - g$$

$\overset{\text{Céa}(3.16)}{\Longrightarrow}$ $\|u-u_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \overset{g=g_h}{=} \|w - w_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \le \frac{C_1}{c}\|w - I_h w\|_{H^{1,2}(\Omega)}$

$$\underset{3.25}{\le} C\, h^{k+1-1}\, \underbrace{|w|_{H^{k+1,2}(\Omega)}}$$

$$= |u|_{H^{k+1,2}(\Omega)} + \underbrace{|g|_{H^{k+1,2}(\Omega)}}_{\text{falls } \le |u|_{H^{k+1,2}(\Omega)}} \; (\checkmark)$$

nun zum allgemeinen Fall:

Probleme: • $u - u_h \notin H_0^{1,2}(\Omega)$ im Allgemeinen,
also nicht als Testfunktion zugelassen
• $\|g - g_h\|_{H^{1,2}(\Omega)}$ sollte vermieden werden als Term

$$(\tilde{E}_h) \Leftrightarrow a(w_h,\varphi_h) = \int_\Omega f \varphi_h \, dx - a(g_h,\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0}$$

definiere: $\tilde{w}_h = \underbrace{w_h}_{= u_h - g_h} + g_h - I_h u = u_h - I_h u$

dann gilt: $a(\tilde{w}_h,\varphi_h) = \int_\Omega f \varphi_h \, dx - a(I_h u,\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0}$

$\tilde{w} \equiv 0 \leftrightarrow a(\tilde{w},\varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dx - a(u,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$

$\ominus$ $a(\tilde{w}_h,\varphi_h) = a(u - I_h u,\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0}$

$\overset{\varphi_h = \tilde{w}_h}{\Longrightarrow}$ $\|\tilde{w}_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \le \frac{1}{c} a(\tilde{w}_h,\tilde{w}_h) = \frac{1}{c} a(u - I_h u, \tilde{w}_h)$

$$\Rightarrow \|\tilde{w}_h\|^2_{H^{1,2}(\Omega)} \le \frac{C_1}{c} \|u - I_h u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \|\tilde{w}_h\|_{H^{1,2}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{w}_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \le \frac{C_1}{c} \|u - I_h u\|_{H^{1,2}(\Omega)}$$

$$\|u - u_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \underset{\tilde{w}_h = u_h - I_h u}{=} \|u - I_h u - \tilde{w}_h\|_{H^{1,2}(\Omega)}$$

$$\le \|u - I_h u\|_{H^{1,2}(\Omega)} + \frac{C_1}{c} \|u - I_h u\|_{H^{1,2}(\Omega)}$$

$$\le C_1 h^k |u|_{H^{k+1,2}(\Omega)} \qquad \square$$

3.27 **Satz** (Konvergenz ohne Regularitätsvoraussetzungen)

Ω polygonal berandet, beschränkt, $\{\mathcal{T}_h\}$ Familie zulässiger regulärer Triangulierungen, $V_h = V_{k,h}$ Lagrange-FE-Raum, u Lsg zu $(\tilde{E})$, u_h Lsg zu $(\tilde{E}_h)$, $g_h \xrightarrow[H^{1,2}(\Omega)]{} g$ $u = g$ auf $\partial\Omega$

dann gilt
$$\|u - u_h\|_{H^{1,2}(\Omega)} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Bew $H^{2,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}), H^{1,2}(\Omega)$ $\boxed{\text{falls } w \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{1,2}_0(\Omega)}$ $\Rightarrow$

$$\|w - I_h w\|_{1,2,T} \overset{3.25.}{\le} C_1 h(T)^{2 + \frac{d}{2} - 1 - 0} |w|_{2,\infty,T}$$

zu $w \in H^{1,2}_0$, $\epsilon > 0$ wähle $w_\epsilon \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{1,2}_0(\Omega)$

mit $\|w - w_\epsilon\|_{1,2} \le \frac{\epsilon}{2} \leftarrow$ $H^{2,\infty}$ dicht in $H^{1,2}$

und $\|w_\epsilon - I_h w_\epsilon\| \le \frac{\epsilon}{2} \leftarrow$ für h klein genug

Nun betrachte $w = u - g$, $w_h = u_h - g_h$:

$$a(w - w_h, \varphi_h) = a(g_h - g, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,k,0}$$

$$\|w - w_h\|_{1,2}^2 \le \frac{1}{c}\Big(\underbrace{a(w - w_h, w - I_h w_\epsilon)}_{} + \underbrace{a(w - w_h, I_h w_\epsilon - w_h)}_{} \Big)$$

$$\le C_1 \|w - w_h\|_{1,2} \|w - I_h w_\epsilon\|_{1,2}$$

$$\le \frac{C_1 \delta}{2} \|w - w_h\|_{1,2}^2 + \frac{C_1}{2\delta} \|w - I_h w_\epsilon\|_{1,2}^2$$

$$\boxed{ab \le \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2}$$

$$= a(g_h - g, I_h w_\epsilon - w_h)$$

$$\le C_1 \|g_h - g\|_{1,2} \|w_h - I_h w_\epsilon\|$$

$$\le C_1 \frac{\|g_h - g\|_{1,2}^2}{2\delta} + \frac{C_1 \delta}{2} \underbrace{\Big(\|w - w_h\|_{1,2} + \|w - I_h w_\epsilon\|_1 \Big)^2}_{\le 2\|w - w_h\|_{1,2}^2 + 2\|w - I_h w_\epsilon\|_{1,2}^2}$$

$$\Rightarrow \|w - w_h\|_{1,2}^2 \le C_1 \Big(\underbrace{\|w - I_h w_\epsilon\|_{1,2}^2}_{\le (\|w - w_\epsilon\|_{1,2} + \|w_\epsilon - I_h w_\epsilon\|_{1,2})^2 \le \epsilon^2} + \underbrace{\|g - g_h\|^2}_{\xrightarrow{h \to 0} 0} \Big)$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{1,2} \le \underbrace{\|w - w_h\|_{1,2}}_{\to 0} + \underbrace{\|g - g_h\|_{1,2}}_{\to 0}$$

$\square$

Bisher:

- $\|u - u_h\|_{1,2} \le C_1 h^k |u|_{k+1,2}$
- Für den Interpolationsfehler gilt aber auch:

$$\|u - I_h u\|_{0,2} \le C_1 h^{k+1} |u|_{k+1,2}$$

Gilt auch $\|u - u_h\|_{0,2} \le C_1 h^{k+1}$?

3.28 **Lemma** (Aubin-Nitsche)

Vor. wie 3.26, $g = g_h = 0$, dann gilt

$$\|u-u_h\|_{0,2,\Omega} \le C\, \|u-u_h\|_{1,2,\Omega} \sup_{0\neq z\in L^2} \left(\inf_{\varphi_h\in V_{h,k,0}} \frac{\|\varphi_z - \varphi_h\|_{1,2,\Omega}}{\|z\|_{0,2,\Omega}} \right)$$

wobei φ_z Lösung des dualen Problems

$$a(w,\varphi_z) = (w,z) \quad \forall w\in H_0^{1,2}(\Omega)$$

Bew

$$\|u-u_h\|_{0,2,\Omega} = \sup_{\substack{z\in L^2(\Omega)\\ z\neq 0}} \frac{(u-u_h, z)}{\|z\|_{0,2,\Omega}}$$

$$= \sup_{0\neq z\in L^2(\Omega)} \frac{a(u-u_h,\varphi_z)}{\|z\|_{0,2,\Omega}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Orthogonalität}\\ \text{des Fehlers}}}{=} \sup_{0\neq z\in L^2(\Omega)} \inf_{\varphi_h\in V_{h,k,0}} \frac{a(u-u_h,\varphi_z-\varphi_h)}{\|z\|_{0,2,\Omega}}$$

$\square$

3.29 **Folgerung** (L^2-Fehlerabschätzung)

Vor. wie 3.26, $d\le 3$, für alle $z\in L^2(\Omega)$ sei $\varphi_z\in H^{2,2}(\Omega)$ mit $\|\varphi_z\|_{2,2,\Omega} \le C\,\|z\|_{0,2,\Omega}$, $\|u-u_h\|_{0,2,\partial\Omega}\le C h^{k+1}$, $a_{ij}\in H^{1,\infty}(\Omega)$ $\forall_{i,j=1,\dots,d}$, dann gilt

$$\|u-u_h\|_{0,2,\Omega} \le C\, h^{k+1}\left(|u|_{k+1,2,\Omega} + 1\right)$$

Bem Ω konvex $\Rightarrow$ duales Problem ist regulär,

d.h. $\|\varphi_z\|_{2,2,\Omega} \le C\,\|z\|_{0,2,\Omega}$

Bew $\boxed{g = g_h = 0}$ $\quad d \le 3 \Rightarrow 2 - \frac{d}{2} > 0 \Rightarrow I_h$ wohldef. auf $H^{2,2}(\Omega)$

$$\| \varphi_z - I_h \varphi_z \|_{1,2,\Omega} \underset{3.25}{\le} C h |\varphi_z|_{2,2,\Omega} \le C h \|z\|_{0,2,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{0,2,\Omega} \overset{2.28}{\le} C \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} h \overset{2.26}{\le} C h^{k+1} |u|_{k+1,2,\Omega}$$

---

nun zum Fall inhomogene Randwerte:

$$\tilde{w}_h := w_h + g_h - I_h u = u_h - I_h u \in V_{h,k,0}$$

$$\|\tilde{w}_h\|_{0,2}^2 = a(\tilde{w}_h, \varphi_{\tilde{w}_h}) = a(\tilde{w}_h, \varphi_{\tilde{w}_h} - I_h \varphi_{\tilde{w}_h}) + a(\tilde{w}_h, I_h \varphi_{\tilde{w}_h})$$

$$\underset{\text{Bew. von } 3.26}{\le} C \|\tilde{w}_h\|_{1,2,\Omega} h \|\tilde{w}_h\|_{0,2,\Omega} + \underbrace{a(u - I_h u, I_h \varphi_{\tilde{w}_h})}_{= \circledast}$$

$$\circledast = a(u - I_h u, I_h \varphi_{\tilde{w}_h} - \varphi_{\tilde{w}_h}) + a(u - I_h u, \varphi_{\tilde{w}_h})$$

$$\underset{\text{s.o.}}{\le} C \|u - I_h u\|_{1,2,\Omega} h \|\tilde{w}_h\|_{0,2} + \underbrace{\left| \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j (u - I_h u) \partial_i \varphi_{\tilde{w}_h} \, dx \right|}$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \Big| - \int_\Omega (u - I_h u) \sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i \varphi_{\tilde{w}_h}) \, dx + \int_{\partial\Omega} (u - I_h u) \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \varphi_{\tilde{w}_h} n_j \, da \Big|$$

$$\le C \|u - I_h u\|_{0,2,\Omega} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{1,\infty,\Omega} \|\varphi_{\tilde{w}_h}\|_{2,2,\Omega}$$

$$+ C \|u - I_h u\|_{0,2,\partial\Omega} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\partial\Omega} \|\nabla \varphi_{\tilde{w}_h}\|_{0,2,\partial\Omega}$$

$$\|\nabla \varphi_{\tilde{w}_h}\|_{0,2,\partial\Omega} \underset{\text{Spursatz}}{\leq} \|\varphi_{\tilde{w}_h}\|_{2,2,\Omega} \leq C \|\tilde{w}_h\|_{0,2,\Omega}$$

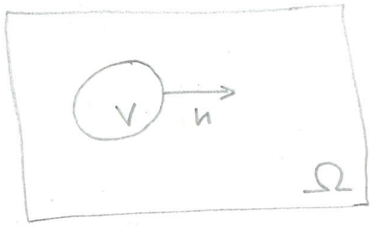
$$\Rightarrow \|\tilde{w}_h\|^2_{0,2,\Omega} \leq C \Big[\underbrace{h\left(\|u-u_h\|_{1,2,\Omega} + \|u-I_h u\|_{1,2,\Omega}\right) + \|u-I_h u\|_{0,2,\Omega} + \|u - I_h u\|_{0,2,\partial\Omega}}_{\leq C h^{k+1}\left(|u|_{k+1,2,\Omega} + 1\right)} \Big] \|\tilde{w}\|_{0,2,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_{0,2,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{0,2,\Omega} + \|I_h u - u_h\|_{0,2,\Omega}$$
$$\leq C h^{k+1}\left(|u|_{k+1,2,\Omega} + 1\right)$$

$\square$

4. Numerik parabolischer Differentialgleichungen

Erinnerung (Wintersemester):



u Temperatur

f Quellterm

q Wärmefluß $\quad q(x) = -K\nabla u(x)$ (Materialgesetz)

(anisotrop: $q(x) = -a(x)\nabla u(x) \qquad a(x) \in \mathbb{R}^{d,d}$)

Erhaltungssatz:
$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx = \int_V f\,dx - \int_{\partial V} q\cdot n\,da$$

da n äußere Normale

Satz von Gauß $\Rightarrow$
$$\int_V \partial_t u - \operatorname{div} q - f\,dx = 0$$

$\forall$ Testvolumen V

Fundamental-Lemma $\Rightarrow$
$$\boxed{(P) \quad \partial_t u(x) - \operatorname{div}\big(a(x)\nabla u(x)\big) = f(x) \quad \forall x\in\Omega}$$

$\oplus$ Randwerte ($\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$)

$$q(t,x)\cdot n(x) = \gamma(t,x) \text{ auf } \Gamma_N \text{ für } t>0$$
$$u(t,x) = g(t,x) \text{ auf } \Gamma_D \text{ für } t>0$$

$\oplus$ Anfangswerte $\quad u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x\in\Omega$

$\boxed{\Omega = \mathbb{R}^d}$ $\quad$ (P) Gesucht $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$$
$$u(0,\cdot) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^d$$

(Cauchy-Problem)

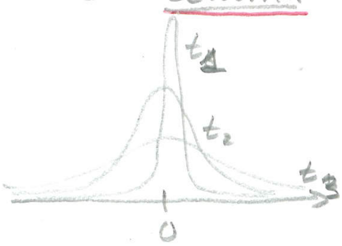
4.1. Def (Fundamentallösung)

$F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ heißt Fundamentallösung zu (P), falls $\partial_t F - \Delta F = \delta_{(0,0)}$ im Distributionensinn.

4.2 Lemma

$$F(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & ; t>0 \\ 0 & ; t\leq 0 \end{cases}$$

ist Fundamentallösung zu (P)



$t_1 < t_2 < t_3$

Bew (i) $\boxed{\partial_t F - \Delta F \overset{!}{=} 0 \quad \forall_{t>0}}$

$$\partial_t F(t,x) - \Delta F(t,x) \underset{\uparrow}{=} F(t,x)\left(\left(-\frac{d}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) - \left(-\frac{d}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right)\right)$$

$$\partial_{x_i} F = -\frac{x_i}{2t} F$$

$$= 0$$

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^d} F(t,x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\tilde{x}|^2} d\tilde{x} \underset{\uparrow}{=} 1$$

$$\tilde{x} = -\frac{x}{2\sqrt{t}}$$

$$\det D_x \tilde{x} = \frac{1}{(2\sqrt{t})^d} = \frac{1}{\sqrt{4t}^{\,d}}$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

und $$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(0)} F(t,x)\,dx = 0$$

$\Rightarrow$ $F(t,\cdot)$ ist eine Diracfolge:

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} F(t,x)\,\varphi(t,x)\,dx = \varphi(0,0) \qquad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$$

(iii) F löst $\boxed{\partial_t F - \Delta F = \delta_{(0,0)}}$

Betrachte $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} F \underbrace{(-\partial_t - \Delta)}_{\substack{\text{ergibt sich durch formales} \\ \text{Wälzen der Ableitungen}}} \varphi \, dx\,dt \overset{!}{=} \delta_{(0,0)}\varphi := \varphi(0,0)$$

Lösung im Distributionen-Sinn

$$= \underbrace{\int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^d} F(-\partial_t - \Delta)\varphi \, dx\,dt}_{} + \underbrace{\int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} F(t,x) \underbrace{(-\partial_t - \Delta)}_{} \varphi(t,x)\, dx\,dt}_{}$$

partielle Integration

$$\underbrace{\le \max_{t,x} |(-\partial_t - \Delta)\varphi| \underbrace{\int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^d} F(t,x)\,dx\,dt}_{= \epsilon \cdot 1}}_{} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

$$= \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\partial_t F - \Delta F)}_{=0} \varphi \, dx\,dt + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} F(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)\,dx}_{} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \varphi(0,0)$$

siehe oben

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} F(-\partial_t - \Delta)\varphi \, dx\,dt = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)}\varphi$$

□

4.3. **Lemma** Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t,x-y)\,u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(t-s,x-y)\,f(s,y)\,dy\,ds$$

aus $L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ und löst das Cauchy-Problem (P), d.h. u löst (P) im Distributionensinn und

$$u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0 \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^d).$$

<u>Bew</u> (i) Betrachte Diracfolge φ_t $(t \to 0)$

$$\left\| \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t * f \, dy \, dt \right)(x) \right\|_1 \le \int_0^t \| f(t,\cdot) \|_{1,\mathbb{R}^d} \le \| f \|_{1,\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d}$$

$\Rightarrow$ Für $u_0 = 0$, $f \in L^1$: $\quad \| u(t,\cdot) \|_{1,\mathbb{R}^d} \le \| f \|_{1,\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d}$

Für $u_0 \in L^1$, $f = 0$: $\quad \| u(t,\cdot) \|_{1,\mathbb{R}^d} \le \| u_0 \|_{1,\mathbb{R}^d}$ (analoges Argument)

(ii) <u>z.z. u löst (P) im Distributionensinn:</u>

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ $\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) \left(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi \right) dx \, dt$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(t, x-y) u_0(y) \, dy \right) \underbrace{\left(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi \right)}_{\text{partielle Int.}} dx \, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(t-s, x-y) f(s,y) \, dy \, ds \right) \underbrace{\left(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi \right)}_{\text{partielle Integration}} dx \, dt$$

$$= \quad 0 + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\lim_{s \to t} \int_{\mathbb{R}^d} F(t-s, x-y) f(s,y) dy}_{= f(t,x)} \varphi(t,x) dx \, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) \varphi(t,x) \, dx \, dt \quad \Rightarrow \quad \text{Beh } (\checkmark)$$

(iii) <u>Anfangswerte</u>

$$\| u(t,\cdot) - u_0 \|_{1,\mathbb{R}^d} \le \underbrace{\left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(t-s, x-y) f(s,y) \, dy \, ds \right\|_{1,\mathbb{R}^d}}_{\xrightarrow{t \to 0} 0}$$

$$+ \left\| \int_{\mathbb{R}^d} F(t,y) \underbrace{\| u_0(\cdot - y) - u_0 \|_{1,\mathbb{R}^d}}_{\xrightarrow{y \to 0} 0} dy \right.$$

$0 \xleftarrow{t \to 0}$ Fallunterscheidung: $y \le \epsilon$ $\qquad$ $t \to 0$, $y \ge \epsilon$

$$\Rightarrow \quad u(t,\cdot) \xrightarrow[L^1(\mathbb{R}^d)]{} u_0$$

$\square$

4.4. <u>Bem</u> (Glättungsverhalten für $t>0$)

$\boxed{d=1}$ $\quad \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$u(0,\cdot) = u_0$ auf $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ u glatt für $t>0$, selbst wenn u_0 unstetig:

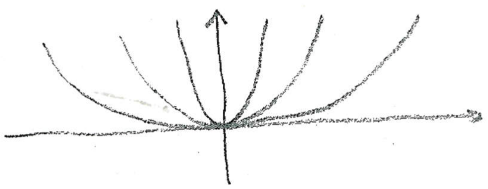
$$\partial_x^k u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^k \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right) u_0(y)\, dy$$

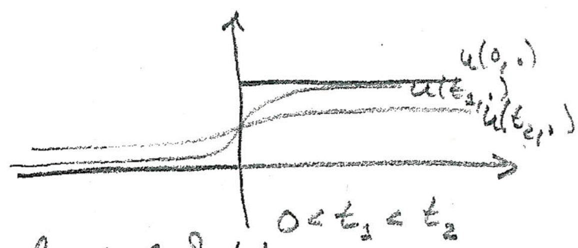
<u>Bsp</u> $\quad u_0 = \chi_{[x>0]}$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy \underset{\tilde{y} = \frac{x-y}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tilde{y}^2}\, d\tilde{y}$$

$$=: \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = \text{konstant} \Leftarrow \frac{x}{\sqrt{t}} = \lambda \Leftarrow t = \frac{x^2}{\lambda^2}$$





$\rightsquigarrow$ unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit!

Nun zur Darstellung der Lösung parabolischer Anfangswertprobleme:

WH Gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\dot{u} + Au = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \qquad u(0) = u_0$$

mit $u: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ pos. def., symm.

$\lambda_1, \ldots \lambda_N$ Eigenwerte zu ON-System von Eigenvektoren $u^1, \ldots u^N$ $\to$ Ansatz: $u = \sum_{i=1}^{N} w_i(t) u^i$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\dot{w}_i(t) + \lambda_i w_i(t) \right) u^i = 0 \iff \begin{cases} \dot{w}_i(t) = -\lambda_i w_i \\ w_i(0) = u_0 \cdot u^i \end{cases} \to w_i(t) = e^{-\lambda_i t} u_0 \cdot u^i$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i t} (u_0 \cdot u^i) u^i}$$

Übertragung auf parabolische Probleme:

$u: \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$ $\qquad \dot{u}(t) + A u(t) = 0$ auf $\mathbb{R}^+$

$$u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$$

$\oplus$ Randbedingung $u(t,\cdot)\big|_{\partial\Omega} = 0 \ \forall_{t>0}$

mit $Au = -\sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j u)$ (elliptischer Operator)

z.B. $Au = -\Delta u$

Pb A nicht definiert auf allgemeinen L^2-Funktionen

4.5. **Satz** (ON-System aus Eigenfunktionen)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ Lipschitz,

$A : H_0^{1,2}(\Omega) \to H^{-1,2}(\Omega)$ mit

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \, \partial_i \varphi \, dx$$

$a_{ij} = a_{ji}$, $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_j \xi_i \geq c_0 \|\xi\|^2$, $c_0 > 0$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$,

dann gibt es eine Folge $(\lambda_i)_{i \geq 1}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots\ldots$,

$\lambda_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty$ und Funktionen $u^i \in H_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$Au^i = \lambda_i u^i$ $\left(\langle Au^i, \varphi \rangle = \lambda_i (\varphi, u^i)_{L^2(\Omega)} \right)$,

$\{u^i\}_{i \geq 1}$ ist <u>vollständiges ON-System</u> auf $L^2(\Omega)$, d.h.

$(u^i, u^j)_{L^2} = \delta_{ij}$, $w = \sum_{i=1}^\infty (w, u^i) u^i$ $\forall w \in L^2(\Omega)$,

$a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \Rightarrow u^i \in C^\infty(\Omega)$ $\left(\partial\Omega \in C^2 \Rightarrow u^i \in C^2(\overline{\Omega}) \right)$

Beweis-Skizze:

(i) <u>Ansatz</u> <u>Rayleigh-Quotienten</u> (<u>vgl. ALMA II</u>)

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \, \partial_i v \, dx$$

<u>Beh</u>: $\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{0,2} = 1}} a(u,u) > 0$ und wird angenommen für $u^1 \in H_0^{1,2}(\Omega)$

<u>hierzu</u>: $(v_j)_{j \geq 1}$ Minimalfolge, d.h. $\|v_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$

und $a(v_j, v_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \lambda_1$

$\overset{\text{Poincaré}}{\Longrightarrow}$ $\|v_j\|_{1,2} \leq C$

<u>Bem</u> im $\mathbb{R}^N$ gäbe es jetzt eine konvergente Teilfolge, die gegen ein u^1 konvergiert!

hier kann man nur zeigen, dass es eine schwach konvergente Teilfolge gibt, d.h.

$$\{v_{j(k)}\}_{k\geq 1} \quad \text{mit} \quad \langle \varphi, v_{j(k)} \rangle_{H^{-1,2}, H_0^{1,2}} \longrightarrow \langle \varphi, u^1 \rangle_{H^{-1,2}, H_0^{1,2}} \qquad \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

ferner kann man zeigen (Satz von Rellich), dass

$$\| v_{j(k)} - u^1 \|_{0,2,\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad , \text{insbesondere } \|u^1\|_{0,2} = 1$$

(ii) z.z. $\boxed{a(u^1,u^1) = \lambda_1}$ (Unterhalbstetigkeit)

$$0 \leq a(v_{j(k)} - u^1, v_{j(k)} - u^1) = \underbrace{a(v_{j(k)}, v_{j(k)})}_{\to \lambda_1} - \underbrace{2a(v_{j(k)}, u^1)}_{\to 2a(u^1,u^1)} + a(u^1,u^1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \geq a(u^1,u^1) \xrightarrow[\lambda_1 = \inf(\ldots)]{} \boxed{a(u^1,u^1) = \lambda_1}$$

(iii) $\boxed{\lambda_j = \inf_{\substack{u \in V^j \\ \|u\|_{0,2}=1}} a(u,u) \quad , \quad V^j = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega) \mid (u,u^i) = 0 \ \forall_{i<j}\} \quad (V^0 = H_0^{1,2}(\Omega))}$

V^j abgeschlossen in $H_0^{1,2}$ bzgl. schwacher Konvergenz

$$\overset{(i),(ii)}{\Longrightarrow} \quad \exists\, u^j \text{ mit } \lambda_j = a(u^j,u^j)$$

$$\|u^j\|_{0,2} = 1$$

$$(u^j, u^i) = 0 \quad \forall_{i<j}$$

ferner: $\underset{j\geq k}{V^j \subseteq V^k} \Rightarrow \lambda_j \geq \lambda_k$

(iv) z.z. $\boxed{\lambda_j \overset{!}{\longrightarrow} \infty}$

Annahme: $\lambda_j \leq C_1 \Rightarrow \|u^j\|_{1,2}^2 \leq \frac{1}{c_0} a(u^j,u^j) = \frac{1}{c_0} \lambda_j (u^j,u^j)$

$$\leq \frac{C_1}{c_0}$$

$\Rightarrow$ Es gibt Teilfolge $(u^{j(k)})_{k\geq 1}$ mit $\langle \varphi, u^{j(k)}\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \varphi, u^\infty\rangle$

$\Rightarrow$ $\|u^{j(k)} - u^\infty\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \|u^\infty\|_{0,2} = 1$

Satz von Rellich

$\Rightarrow 0 = (u^{j(k)}, u^{j(k+1)}) \xrightarrow[j\to\infty]{} (u^\infty, u^\infty) = 1$ $\lightning$

(v) Eigenwerteigenschaft

$\dfrac{a(u^j+\epsilon\varphi, u^j+\epsilon\varphi)}{\|u^j+\epsilon\varphi\|_{0,2}^2}$ für $\varphi \in V^j$ minimal für $\epsilon = 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{d\epsilon}(\text{———})\Big|_{\epsilon=0} = \frac{2\, a(u^j,\varphi)\overbrace{\|u^j\|_{0,2}^2}^{=1} - 2\underbrace{a(u^j,u^j)}_{=\lambda_j}(u^j,\varphi)_{0,2}}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(u^j,\varphi) = \lambda_j (u^j,\varphi)_{0,2} \quad \forall \varphi \in V^j} \quad (*)$$

$\varphi = \sum_{i=1}^{j-1}(\varphi,u^i)u^i$

$$a(u^j,\varphi) = \sum_{i=1}^{j-1}(\varphi,u^i)\, a(u^j,u^i)$$

$\mathrm{span}\{u^1,\dots,u^{j-1}\} \subset (V^j)^\perp$

$$= \sum_{i=1}^{j-1}(\varphi,u^i)_{0,2}\,\lambda_i (u^j,u^i)_{0,2} = 0 = \lambda_j(u^j,\varphi)$$

$\Rightarrow (*)$ gilt für alle $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \Rightarrow \boxed{Au^j = \lambda u^j}$

(vi) Vollständigkeit

$v \in H_0^{1,2}(\Omega) \qquad v^m = \sum_{j=1}^m (v,u^j)_{0,2}\, u^j$

$\Rightarrow (v - v^m, u^i) = 0 \;\; \forall_{i\leq m} \Rightarrow v - v^m \in V^{m+1}$

$$\Rightarrow \|v - v^m\|_{0,2}^2\, \lambda_{m+1} \leq a(v-v^m, v-v^m)$$

$$= a(v,v) + \sum_{j,k=1}^m (v,u^j)(v,u^k)\underbrace{a(u^j,u^k)}_{\lambda_j \delta_{kj}}$$

$$- 2\sum_{j=1}^m (v,u^j)\underbrace{a(v,u^j)}_{=\lambda_j(v,u^j)}$$

Diskretes Pendant zu 4.5:

$$A_h : \underbrace{V_{h,0}}_{\text{FE-Raum (mit Nullrandwerten)}} \longrightarrow (V_{h,0})' \text{ mit}$$

$$\langle A_h u_h , \varphi_h \rangle = a(u_h, \varphi_h) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \, \partial_i \varphi \, dx$$

$(\lambda_i^h)_{i=1,\dots m}$ Eigenwerte, u_h^i Eigenfunktionen

$(u_h^i)_{i=1,\dots m}$ ON-System auf $V_{h,0}$

Matrix-Formulierung: $\quad A = \left(a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) \right)_{i,j=1,\dots m}$

$$= a(v,v) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (v, u^j)^2 \leq a(v,v) \leq C \|v\|_{1,2}^2$$

$$\Rightarrow \|v - v^m\|_{0,2}^2 \leq \frac{C}{\lambda_{m+1}} \|v\|_{1,2}^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \Rightarrow (v^j)_j \text{ dicht in } H_0^{1,2}(\Omega)$$

$\Rightarrow$ damit auch dicht in $L^2(\Omega)$

(vii) Regularität (hier ohne Beweis)

□

4.6. Def (Parabolisches Anfangsrandwertproblem)

Ω beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ Lipschitz, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}((0,\infty), L^2(\Omega))$

gesucht $u : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$; $t \mapsto u(t,\cdot)$, so dass

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f \quad \forall_{t>0} \\ u(t)|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \forall_{t>0} \\ u(0,\cdot) &= u_0 \end{aligned} \qquad (P)$$

4.7. Def (Evolutionsoperator)

$E : \mathbb{R}_0^+ \to L(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$

$$E(t)\,u = \sum_{j=1} e^{-\lambda_j t} (u, u^j)_{L^2} u^j \qquad (*)$$

Bem $E(t+s) = E(t)\,E(s) \quad \forall_{t,s \in \mathbb{R}_0^+}$

4.8. Satz (Existenz und Darstellung von Lösungen)

$u(t,\cdot) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) f(s)\,ds$ löst (P) im Distributionensinn, $u \in C^0([0,\infty), L^2(\Omega))$, falls $f \equiv 0$

$\boxed{\text{gilt } u \in C^1((0,\infty), L^2(\Omega)),\ Au \in C^0((0,\infty), L^2(\Omega))}$

Bem $\boxed{\begin{array}{l}\Omega = \mathbb{R}^d \\ (f \equiv 0)\end{array}}$ $\quad (E(t)u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(t, x-y)\, u_0(x-y)\, dy$

Bew: $\boxed{f \equiv 0}$

Die Reihe (*) kann man differenzieren für $t > 0$, da alle Ableitungen majorisiert sind durch $\quad C \sum_{j=1} (u, u^j)_{L^2} u^j$

$\Rightarrow$

$$E^m(t)\, u_0 = \sum_{j=1}^m e^{-\lambda_j t} (u_0, u^j) u^j \xrightarrow[\text{glm. in } t]{L^2} E(t) u_0 \quad \forall_{t>0}$$

$$A E^m(t)\, u_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j e^{-\lambda_j t} (u_0, u^j) u^j \xrightarrow[\text{glm. in } t]{L^2} A E(t) u_0$$

$$\partial_t E^m(t)\, u_0 = \sum_{j=1}^m -\lambda_j e^{-\lambda_j t} (u_0, u^j) u^j \xrightarrow[\text{glm. in } t]{L^2} \partial_t E(t) u_0$$

$\Rightarrow \boxed{\partial_t u(t,\cdot) + A u(t,\cdot) = 0 \quad \forall_{t>0}}$

$\boxed{\text{Bew 4.5 (v i)}} \Rightarrow \quad E^m(0) u_0 \longrightarrow E(0) u_0 = u_0$

Insbesondere: $u \in C^0([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega))$,
$Au \in C^0((0,\infty), L^2(\Omega))$

$\boxed{f \not\equiv 0}$ **formal (Variation der Konstanten):**

$u = u^H + u^I \quad$ mit $\left.\begin{array}{l}\partial_t u^H + A u^H = 0 \\ u^H(0) = u_0\end{array}\right\} u^H(t) = E(t) u_0$ (s.o.)

$$\partial_t u^I + A u^I = f$$
$$u^I(0) = 0$$

Ansatz: $u^I = E(t)\, w(t) \qquad w(0) = 0 \rightsquigarrow$

$$\partial_t u^I = -A \underbrace{E(t)\, w(t)}_{= u^I(t)} + E(t)\, \partial_t w(t) \rightsquigarrow$$

$$\partial_t u^I(t) + A u^I(t) = E(t) \cdot \partial_t w(t) = f(t) \rightsquigarrow$$

$$\underbrace{E(t-s)\, E(s)}_{E(t)}\, \partial_s w(s) = E(t-s) f(s) \rightsquigarrow$$

$$E(t)\, w(t) = E(t) \int_0^t \partial_s w(s)\, ds = \int_0^t E(t-s) f(s)\, ds \rightsquigarrow$$

$$\boxed{u(t) = E(t)\, u_0 + \int_0^t E(t-s) f(s)\, ds}$$

nun zum Beweis: Approximiere f mit Treppenfunktionen f_τ in der Zeit

$$\| E(t)\, w \|_{0,2} \underset{\boxed{t \geq 0}}{\leq} \| w \|_{0,2} \Rightarrow$$

$$\| u(t_2) - u(t_1) \|_{0,2} \underset{\boxed{t_2 > t_1}}{\leq} \| \underbrace{(E(t_2) - E(t_1))\, u_0}_{\xrightarrow[t_2 - t_1 \to 0]{} 0} \|_{0,2} +$$

$$\int_0^{t_1} \underbrace{\| (E(t_2 - s) - E(t_1 - s))\, f_\tau(s) \|_{0,2}}_{\xrightarrow[t_2 - t_1 \to 0]{} 0 \text{ da } f_\tau \text{ Treppenfunktion}}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \| E(t_2 - s)\, f_\tau(s) \|_{0,2}}_{\xrightarrow[t_2 - t_1 \to 0]{} 0}$$

$$+ \int_0^{t_2} \underbrace{\| E(t_2 - s)\, (f - f_\tau)(s) \|_{0,2}}_{\leq \| f - f_\tau \|_{0,2} \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0} ds$$

$$+ \int_0^{t_1} \underbrace{\| E(t_1 - s)\, (f - f_\tau)(s) \|_{0,2}}_{\xrightarrow[\tau \to 0]{} 0} ds$$

$\Rightarrow \quad u \in C^0([0,\infty), L^2(\Omega))$

z.z. <u>u Lsg im Distributionensinn</u>:

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$

$$\int_0^\infty \int_\Omega \Big(E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) f(s)\,ds\Big)(x) \underbrace{(-\partial_t \varphi + A\varphi)}_{\text{part. Int.}}\,dx\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_\Omega \underbrace{(\partial_t + A)E(t)u_0}_{=0}\,dx\,dt + \underbrace{\int_0^\infty \int_\Omega \int_0^{t-\epsilon} E(t-s) f(s)(-\partial_t\varphi + A\varphi)\,ds\,dx\,dt}_{\text{Leibniz-Formel}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^\infty \int_\Omega \int_{t-\epsilon}^t E(t-s) f(s)(-\partial_t\varphi + A\varphi)\,ds\,dx\,dt}_{\text{Fubini}} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

da $\int_{t-\epsilon}^t \|f(s)\|_{L^1(\Omega)} \to 0$

$$= 0 + \int_0^\infty \int_\Omega \underbrace{E(\epsilon) f(t-\epsilon)}\,\varphi(t)\,dx\,dt$$

$$= \underbrace{E(\epsilon)\big(f(t-\epsilon) - f(t)\big)}_{\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0,\ f \in L^1_{loc}(L^2)} + \underbrace{E(\epsilon) f(t)}_{\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} f(t)}$$

$$= \int_0^\infty \int_\Omega f(t)\,\varphi(t)\,dx\,dt$$

<u>Annahme der Anfangsdaten</u>: $E(\cdot)$ stetig (s.o.) und $f \in L^1_{loc}(L^2)$ (s.o.) $\square$

<u>Beobachtung</u>: $$A^k E(t) u = \sum^\infty \underbrace{\lambda_j^k e^{-\lambda_j t}}_{\le C(\epsilon)\ \forall t > \epsilon} (u_0, u^j) u^j$$

$$\Rightarrow \|A^k E(t) u\|_{L^2(\Omega)} \le C(\epsilon)$$

Nun betrachten wir Finite-Elemente-Verfahren:

Ziel Approximation von $u(t,.)$ durch Funktionen

$u_h(t,.) \in \mathcal{V}_{h,0}$ (semi-diskret)

Bsp $\mathcal{V}_{h,k,0}$ noch kontinuierlich im Raum

Ansatz: $u_h(t,x) = \sum_{k=1}^{m} u_h^k(t)\, \varphi_h^k(x)$

$(\tilde{P})$ Schwache Formulierung (kont.):

$$(u_t, \varphi) + a(u,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall_{t>0} \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$u(0,.) = u_0$$

$$\boxed{\int_\Omega u_t \varphi + \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_j u\, \partial_i \varphi - f\varphi \, dx = 0}$$

$(\tilde{P}_h)$ Semidiskretes Problem:

Finde $u_h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{V}_{h,0}$ mit

$$(\partial_t u_h, \varphi_h) + a(u_h, \varphi_h) = (f, \varphi_h) \quad \forall_{t>0} \ \forall \varphi_h \in \mathcal{V}_{h,k,0}$$

$u_h(0,.) = u_{h,0}$ Approximation von u_0

Diskreter Operator: $A_h : \mathcal{V}_{h,0} \to (\mathcal{V}_{h,0})'$

$$\langle A_h u_h, \varphi_h \rangle = a(u_h, \varphi_h)$$

Matrix-Darstellung:

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{u}_h^k \underbrace{(\varphi_h^k, \varphi_h^i)}_{M_h^{ik}} + \underbrace{u_h^k\, a(\varphi_h^k, \varphi_h^i)}_{\sum_{k=1}^m A_h^{ik} u_h^k} = \underbrace{(f_h, \varphi_h^i)}_{F_h^i}$$

Masse-Matrix Steifigkeitsmatrix

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{M_h \dot{U}_h + A_h U_h = F_h}$$

$$U_h = (u_h^k)_{k=1,\dots,m} \quad , \quad F_h = (F_h^i)_{i=1,\dots,m}$$

M_h pos. def. symm.

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{U}_h - \underbrace{(-M_h^{-1}A_h)}_{=: L_h}\, U_h = M_h^{-1} F_h$$

$=: L_h$ (diskretes Pendant zu Δ)

$$\overset{\text{Kap 1}}{\Longrightarrow} \quad U_h(t) = e^{-L_h t} U_h(0) + \int_0^t e^{-L_h(t-s)} M_h^{-1} F_h(s)\, ds$$

nächster Schritt: Zeitdiskretisierung dieses gewöhnlichen Dgl. systems

aber zunächst: Semi-Diskrete Fehlerabschätzungen

4.9. Lemma (äquivalente Normen)

$\mathring{H}^s(\Omega)$ ist definiert als Unterraum von $L^2(\Omega)$ mit

$$\|v\|_{\mathring{H}^s(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^s (v, u^i)^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \,, \text{ dann}$$

gilt für $s \in \mathbb{N}_0$, $\partial\Omega$ glatt

$$\mathring{H}^s(\Omega) = \left\{ v \in H^s(\Omega) \,\middle|\, A^j v\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall_{j < \frac{s}{2}} \right\}$$

und $\|\cdot\|_{\mathring{H}^s}$, $\|\cdot\|_{H^s}$ sind äquivalente Normen auf $\mathring{H}^s(\Omega)$.

Bew Bezeichnen wir $\{\_\}$ als $\tilde{H}^s$

$$\boxed{\tilde{H}^s \overset{!}{\subset} \mathring{H}^s} \qquad s = 2k + i \quad i \in \{0, 1\}$$

(später gerechtfertigt)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{zunächst } C^\infty}}{\|v\|^2_{\mathring{H}^{2k+i}}} \overset{\downarrow}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k+i} (v, u^j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{i} (v, A^k u^j)^2$$

$$\underset{\text{Randwerte}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{i} (A^k v, u^j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (A^k v, u^j)(A^{k+i} v, u^j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (A^k v, A^{k+i} v)$$

$$\int_\Omega w\, A u^k \underset{w|_{\partial\Omega}=0}{=} \int_\Omega a_{ij}\, \partial_j w\, \partial_i u^k\, dx \underset{u^k|_{\partial\Omega}=0}{=} \int_\Omega A w\, u^k\, dx$$

$$\lambda_j (w, u^j) = a(w, u^j) = (Aw, u^j)$$

Parsevalsche Identität

$$(w, v)_{L^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (w, u^j)(v, u^j)$$

$$\begin{cases} \overset{\boxed{i=1}}{=} a(A^k v, A^k v) \le C \|A^k v\|_{1,2,\Omega} \le C \|v\|_{2,2k+1,\Omega} \\ \overset{\boxed{i=0}}{=} \|A^k v\|^2_{0,2,\Omega} \le C \|v\|_{2,2k,\Omega} \end{cases}$$

C^∞ dicht in H^{2k+i} $\Rightarrow$ Beh.

$\boxed{\overset{\circ}{H}{}^s \overset{!}{\subset} \tilde{H}^s}$

ellipt. Regularitätstheorie:

$$\left.\begin{array}{ll} Aw = f & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \|w\|_{m,2,\Omega} \le C \|f\|_{m-2,2,\Omega}$$

Induktion $\Rightarrow$

$$\|v\|_{2k+i,2,\Omega} \le C \|A^k v\|_{i,2,\Omega}$$

Ferner:

$$\|A^k v\|^2_{i,2,\Omega} = \|A^k \sum_{j=1}^{\infty} (v, u^j) u^j\|^2_{i,2,\Omega}$$

$$= \|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^k (v, u^j) u^j\|^2_{i,2,\Omega}$$

$$\overset{\boxed{i=0}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k} (v, u^j)^2 = \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^{2k}(\Omega)}$$

$$\overset{\boxed{i=1}}{\le} \frac{1}{c_0}\, a\Big(\sum \lambda_j^k (v, u^j) u^j, \sum \lambda_j^k (v, u^j) u^j\Big) = \frac{1}{c_0} \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^{2k+1}} \quad \square$$

4.10. Satz (Glättungseigenschaft von $E(\cdot)$)

Für $v \in L^2(\Omega)$, $t > 0$: $E(t)v \in \dot{H}^s(\Omega)$ $\forall_{s>0}$.

Für $0 \le \ell \le s$ und $v \in \dot{H}^\ell(\Omega)$ gilt:

$$\|E(t)v\|_{\dot{H}^s(\Omega)} \le C\, t^{-\frac{1}{2}(s-\ell)} \|v\|_{\dot{H}^\ell(\Omega)} \quad \forall_{t>0}$$

Bew

$$\|E(t)v\|_{\dot{H}^s(\Omega)} = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^s e^{-2\lambda_j t} (v, u^j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^\infty (t\lambda_j)^{s-\ell} t^{\ell-s} \lambda_j^\ell e^{-2\lambda_j t} (v, u^j)^2$$

$\boxed{\tau^{s-\ell} e^{-2\tau} \le C(s,\ell)}$

$$\le C(s,\ell)\, t^{\ell-s} \sum_{j=1} \lambda_j^\ell (v, u^j)^2 = C(s,\ell)\, t^{\ell-s} \|v\|^2_{\dot{H}^s(\Omega)}$$

□

Ein wichtiges Hilfsmittel:

Ritzprojektion $R_h : H_0^{1,2}(\Omega) \to V_{h,0}$ mit

$$a(R_h u - u, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_{h,0}$$

Existenz: ✓ da $a(\cdot,\cdot)$ Skalarprodukt

$\|R_h u - u\|_{m,2,\Omega} \le ?$

$$|R_h u - u|^2_{1,2,\Omega} \le \frac{1}{c_0} a(R_h u - u, R_h u - u)$$

$$\underset{\text{Orthogonalität}}{\le} \frac{1}{c_0} \inf_{v_h \in V_{h,0}} a(R_h u - u, v_h - u) \Rightarrow$$

$$|R_h u - u|_{1,2,\Omega} \le \frac{C_1}{c_0} \inf_{v \in V_{h,0}} |v_h - u|_{1,2,\Omega} \le \frac{C_1}{c_0} \|I_h u - u\|_{1,}$$

duale Lösung

$$\|R_h u - u\|_{0,2,\Omega}^2 = a(R_h u - u, \varphi_{R_h u - u})$$

$$\underset{\text{Orthogonalität}}{=} a(R_h u - u, \varphi_{R_h u - u} - v_h) \Rightarrow$$

$$\|R_h u - u\|_{0,2,\Omega}^2 \le C_1 |R_h u - u|_{1,2,\Omega} \underbrace{\| \varphi_{R_h u - u} - I_h \varphi_{R_h u - u}|_{1,2,\Omega}}$$

Ω konvex oder $\partial\Omega$ glatt

$$\le C_1 h \|\varphi_{R_h u - u}|_{2,2,\Omega}$$

$$\le C_1 h \|R_h u - u\|_{0,2,\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \|R_h u - u\|_{0,2,\Omega} + h|R_h u - u|_{1,2,\Omega} \le C_1 h^{k+1} |u|_{k+1,2,\Omega} \\ \text{falls } \Omega \text{ konvex oder } \partial\Omega \text{ glatt} \end{array}}$$

4.10. Satz (Semidiskrete L^2-Fehlerabschätzungen)

Ω konvex, u, u_h Lsg'n von $(\tilde{P})$ bzw $(\tilde{P}_h)$

$u_0 \in H^s(\Omega)$, $\partial_t u \in L^1_{loc}((0,\infty), H^s(\Omega))$, dann gilt

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{0,2} \le \|u_{h,0} - u_0\|_{0,2} + Ch^s\Big(\|u_0\|_{s,2} + \int_0^t \|\partial_t u(\xi)\|_{s,2}\, d\xi\Big)$$

Bem: Falls $u_{h,0} = I_h u_0$, $H^s \hookrightarrow C^0$ $\Rightarrow$

$$\|u_{h,0} - u_0\|_{0,2} \le C_1 h^s \|u_0\|_{s,2}$$

Bew

$$u_h - u = \underbrace{(u_h - R_h u)}_{=:\,\Theta} + \underbrace{(R_h u - u)}_{=:\,\varrho}$$

(diskrete Fkt.) (nur Ortsdiskr.-Fehler)

(i)
$$\|\varrho\|_{0,2} \le C_1 h^s \|u(t)\|_{s,2}$$

$$= C h^s \Big(\|u_0(t) + \int_0^t \partial_t u(\xi)\, d\xi\|_{s,2}\Big)$$

$$\le C_1 h^s \|u_0\|_{s,2} + \int_0^t \|\partial_t u(\xi)\|_{s,2}\, d\xi$$

(ii) $(\partial_t \Theta, \varphi_h) + a(\Theta, \varphi_h) = (\partial_t u_h, \varphi_h) + a(u_h, \varphi_h) -$
$(\partial_t R_h u, \varphi_h) + a(R_h u, \varphi_h)$

$= (f, \varphi_h) - (\partial_t R_h u, \varphi_h) - a(u, \varphi_h)$

$= (\partial_t u - \partial_t R_h u, \varphi_h) = (\partial_t \varrho, \varphi_h)$

$\varphi_h = \Theta$

$\Rightarrow (\partial_t \Theta, \Theta) + a(\Theta, \Theta) = (\partial_t \varrho, \Theta)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\partial_t \|\Theta\|_{0,2}^2}_{2\, \partial_t \|\Theta\|_{0,2} \|\Theta\|_{0,2}} + a(\Theta, \Theta) \leq \|\partial_t \varrho\|_{0,2} \|\Theta\|_{0,2}$

$\Rightarrow \partial_t \|\Theta\|_{0,2} \leq \|\partial_t \varrho\|_{0,2}$

$\Rightarrow \|\Theta(t)\|_{0,2} \leq \|\Theta(0)\|_{0,2} + \int_0^t \|\partial_t \varrho\|_{0,2}\, d\xi$

$\underset{R_h \partial_t = \partial_t R_h}{=} \|u_{h,0} - R_h u_0\|_{0,2} + \int_0^t \|R_h \partial_t u - \partial_t u\|_{0,2}\, d\xi$

$\leq \|u_{h,0} - u_0\|_{0,2} + \underbrace{\|u_0 - R_h u_0\|_{0,2}}_{\leq C_1 h^s \|u_0\|_{s,2}} + C_1 h^s \int_0^t \|\partial_t u\|_{s,2}\, d\xi$

(i), (ii) $\Rightarrow$ Beh. □

4.11. Satz (Semidiskrete H^1-Fehlerabschätzungen)

u, u_h Lsg'n von $(\tilde{P})$, bzw. $(\tilde{P}_h)$, $u_0 \in H^s(\Omega)$,

$u \in L^\infty_{loc}((0,\infty), H^{s,2}(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2_{loc}((0,\infty), H^{s-1,2}(\Omega))$,

dann gilt

$$|u_h(t) - u(t)|_{1,2} \leq C_1 |u_{h,0} - u_0|_{1,2} + C_1 h^{s-1} \left(\|u_0\|_{s,2} + \|u(t)\|_{s,2} + \left(\int_0^t \|\partial_t u\|_{s-1,2}^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Bew $u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h - u) =: \Theta + \rho$ (wie in 4.10.)

(i) $|\rho(t)|_{1,2} \le C\, h^{s-1}\, |u(t)\|_{s,2}$

(ii) $\Im$ $(\partial_t \Theta, \varphi_h) + a(\Theta, \varphi_h) = -(\partial_t \rho, \varphi_h)$ wähle $\varphi_h = \partial_t \Theta \in V_{h,0}$

$$\|\partial_t \Theta\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2}\partial_t\, a(\Theta,\Theta) = (\partial_t \rho, \partial_t \Theta)$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\|\partial_t \rho\|_{0,2}^2 + \|\partial_t \Theta\|_{0,2}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t\, a(\Theta,\Theta) \le \|\partial_t \rho\|_{0,2}^2$$

$$\Rightarrow \quad c_0 \|\Theta(t)\|_{1,2}^2 \le a(\Theta(t),\Theta(t)) = a(\Theta(0),\Theta(0)) + \int_0^t \partial_\xi\, a(\Theta(\xi),\Theta(\xi))\, d\xi$$
$$\le C\, |\Theta(0)|_{1,2}^2 + \int_0^t \|\partial_t \rho\|^2 d\xi$$
$$\le C\left(|u_{h,0} - u_0|_{1,2} + \underbrace{|R_h u_0 - u_0|_{1,2}}_{C h^{s-1} \|u_0\|_{s,2}}\right)^2$$
$$+ C \int_0^t \underbrace{\|\partial_t \rho(t)\|_{0,2}^2}_{(h^{s-1}\|\partial_t u\|_{s-1,2})^2} ds$$

$$\Rightarrow \|\Theta(t)\|_{1,2}^2 \le C\, |u_{h,0} - u_0|_{1,2}^2 + C\left(h^{s-1}\|u_0\|_{s,2}\right)^2$$
$$+ C\, h^{2(s-1)}\left(\int_0^t \|\partial_t u\|_{s-1,2}^2\, ds\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\Theta(t)|_{1,2} \le C\left(|u_{h,0} - u_0|_{1,2} + h^{s-1}\|u_0\|_{s,2} + h^{s-1}\left(\int_0^t \|\partial_t u\|_{s-1,2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Äquivalenz von 2- und 1-Norm im $\mathbb{R}^n$

(i), (ii) $\Rightarrow$ Beh $\square$

Nun diskretisieren wir in der Zeit:

4.12 Schema (Rückwärts-Eulerverfahren)

τ Zeitschritt, $u_h^k \in V_{h,0}$ Lsg von

$$(\tilde{P}^E_{h,\tau}) \quad \left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}, \varphi_h\right) + a(u_h^k, \varphi_h) = (f(t_k,\cdot), \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,0}$$

$$u_h^0 = u_{h,0} \qquad (t_k = k\tau)$$

Bem
- lin. Gl.system: $(M_h + \tau A_h)\, U_h^k = M_h U_h^{k-1} + \tau F_h(t_k)$

  U_h^k Knotenvektor zu u_h^k

  $F_h(t) = (f(t,\cdot), \varphi_h^j)_{j=1,\dots m}$
- M_h, A_h pos. definite (Neumannrandwert $\rightsquigarrow A_h$ pos. semidef.)

  $\Rightarrow (M_h + \tau A_h)$ pos. def. $\Rightarrow U_h^k$ eindt. def.

4.13 Satz (Fehlerabschätzungen für das Rückwärts-Eulerverfahren)

$u, (u_h^k)_{k=0,\dots}$ Lsg von $(\tilde{P})$, $(\tilde{P}^E_{h,\tau})$, $u_0 \in H^{s,2}(\Omega)$,

$\partial_t u \in L^2_{loc}((0,\infty), H^{s,2}(\Omega))$, $\partial_t^2 u \in L^1_{loc}((0,\infty), L^2)$, dann gilt:

$$\|u_h^k - u(k\tau)\|_{0,2} \le \|u_{h,0} - u_0\|_{0,2} + C h^s \left(\|u_0\|_{s,2} + \int_0^{t_k} \|\partial_t u(\xi)\|_{s,2}\, d\xi \right) + C\tau \int_0^{t_k} \|\partial_t^2 u(\xi)\|_{0,2}\, d\xi.$$

Bew (Notation) $\partial_t^\tau v(t) = \dfrac{v(t) - v(t-\tau)}{\tau}$ (Diff. quot.)

$$\partial_t^\tau v^k = \frac{v^k - v^{k-1}}{\tau}$$

Ansatz $$u_h^k - u(t_k) = \underbrace{(u_h^k - R_h u(t_k))}_{=:\Theta^k} + \underbrace{(R_h u(t_k) - u(t_k))}_{=:\rho^k}$$

wie in 4.11: $\quad \|\varrho^k\|_{0,2} \le C h^s \left(\|u_0\|_{s,2} + \int_0^{t_k} \|\partial_t u\|_{s,2}\, d\xi \right)$

nun zu Θ^k:

$$(\partial_t^\tau \Theta^k, \varphi_h) + a(\Theta^k, \varphi_h) = (\partial^\tau u_h^k, \varphi_h) + a(u_h^k, \varphi_h)$$
$$- (\partial_t^\tau R_h u(t_k), \varphi_h) - a(R_h u(t_k), \varphi_h)$$

$$= \underbrace{(f(t_k,\cdot), \varphi_h) - a(u(t_k,\cdot), \varphi_h)}_{(\partial_t u(t_k,\cdot), \varphi_h)} - (R_h \partial_t^\tau u(t_k,\cdot), \varphi_h)$$

$$= \underbrace{((\partial_t u - \partial_t^\tau u)(t_k,\cdot), \varphi_h)}_{=: (\omega_1^k, \varphi_h)} + \underbrace{((\mathbb{1} - R_h)\partial_t^\tau u(t_k,\cdot), \varphi_h)}_{=: (\omega_2^k, \varphi_h)}$$

$$=: (\omega^k, \varphi_h) \quad \text{mit } \omega^k = \omega_1^k + \omega_2^k$$

zusammenfassend: $\quad (\partial_t^\tau \Theta^k, \varphi_h) + a(\Theta^k, \varphi_h) = (\omega^k, \varphi_h) \quad \overset{\varphi_h = \Theta^k}{\Longrightarrow}$

$$(\partial_t^\tau \Theta^k, \Theta^k) \le \|\omega^k\|_{0,2} \|\Theta^k\|_{0,2}$$

[Bem: zeitdiskrete Variante von $(\partial_t \Theta, \Theta) = (\partial_t \varrho, \Theta)$]

$$\Rightarrow \|\Theta^k\|_{0,2}^2 - \underbrace{(\Theta^{k-1}, \Theta^k)}_{\le \|\Theta^{k-1}\| \|\Theta^k\|} \le \tau \|\omega^k\|_{0,2} \|\Theta^k\|_{0,2}$$

$$\overset{\cdot \frac{1}{\|\Theta^k\|}}{\Longrightarrow} \|\Theta^k\|_{0,2} \le \|\Theta^{k-1}\|_{0,2} + \tau \|\omega^k\|_{0,2}$$

$$\overset{\text{Iteration}}{\Longrightarrow} \|\Theta^k\|_{0,2} \le \underbrace{\|\Theta^0\|_{0,2}}_{\|u_h^0 - R_h u_0\|} + \tau \sum_{i=1}^{k} \left(\|\omega_1^i\|_{0,2} + \|\omega_2^i\|_{0,2} \right)$$

$$\le \|u_h^0 - u_0\| + C h^s \|u_0\|_{s,2}$$

im Einzelnen:

$\boxed{\text{zu } \omega_1^i}$
$$\omega_1^i = \partial_t u(t_i) - \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{\tau}$$
$$= \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\partial_t u(t_i) - \partial_t u(\xi)}_{=v} \, d\xi$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} u'v = -\int_{t_{i-1}}^{t_i} uv' + uv\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

part. Int.

$$= \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{(\xi - t_{i-1})}_{|\cdot| \le \tau} \partial_t^2 u(\xi) \, d\xi + 0$$

$$\Rightarrow \tau \sum_{i=1}^{k} \|\omega_1^i\|_{0,2} \le \tau \int_0^{t_k} \|\partial_t^2 u(\xi)\| \, d\xi$$

$\boxed{\text{zu } \omega_2^i}$
$$\omega_2^i = (\mathbb{1} - R_h) \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u(\xi) \, d\xi = \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\mathbb{1} - R_h) \partial_t u(\xi) \, d\xi$$

$$\Rightarrow \tau \sum_{i=1}^{k} \|\omega_2^i\|_{0,2} \le \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|(\mathbb{1} - R_h) \partial_t u\|_{0,2}}_{\le C h^s \|\partial_t u\|_{s,2}}$$

$\square$

Nachteil: Rückwärts-Euler-Verfahren ist nur 1. Ordnung in der Zeit: $\|u^k - u(t_k, \cdot)\|_{0,2} = O(h^s + \tau)$

Bem: (Gradientenfehlerabschätzung)

$$\|u^k - u(t_k, \cdot)\|_{1,2} \le C \|u_{h,0} - u_0\|_{1,2} + C\tau \left(\int_0^{t_k} \|\partial_t^2 u\|_{0,2}^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ C h^{s-1} \left(\|u_0\|_{s,2} + \|u(t)\|_{s,2} + \left(\int_0^{t_k} \|\partial_t u\|_{s-1,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

(ohne Beweis)

Ausweg: Diskretisiere $A u$, f zu Zeit $t_{k-\frac{1}{2}} = t_k - \frac{\tau}{2}$

$\rightsquigarrow$ $\partial_t^\tau u_h^k$ ist dann zentraler Differenzenquotient

4.14 Schema (Crank-Nicolson-Verfahren)

$$(\tilde{P}^{CN}_{h,\tau}) \qquad \left(\frac{U_h^k - U_h^{k-1}}{\tau}, \varphi_h\right) + a\left(\frac{U_h^k + U_h^{k-1}}{2}, \varphi_h\right) = \left(f(t_{k-\frac{1}{2}}, \cdot), \varphi_h\right) \quad \forall \varphi_h \in V_{h,0}$$

$$U_h^0 = u_{h,0}$$

$\longleftrightarrow$ Matrixschreibweise:

$$\left(M_h + \frac{\tau}{2} A_h\right) U_h^k = \left(M_h - \frac{\tau}{2} A_h\right) U_h^{k-1} + \tau M_h F_h(t_{k-\frac{1}{2}}, \cdot)$$

$\boxed{f \equiv 0}$

$$U_h^k = \left(\mathbb{1} + \frac{\tau}{2} L_h\right)^{-1} \left(\mathbb{1} - \frac{\tau}{2} L_h\right) U_h^{k-1}$$

mit $L_h = M_h^{-1} A_h$

$$= r(\tau L_h) \qquad \text{mit } r(t) = \frac{1 - \frac{t}{2}}{1 + \frac{t}{2}}$$

rationale Approximation von e^{-t}
(vgl Kapitel 1)