

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^x dx, \quad \text{b) } \int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx, \quad \text{c) } \int \sqrt{x} dx.$$

Tipp: a) mit partieller Integration, b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration oder unter Verwendung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

LÖSUNG:

a)

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Partielle Integration mit:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad g(x) = x, \quad g'(x) = 1.$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3} \log |z| = \frac{1}{3} \log |x^3 + 5|.$$

Substitution: $z := x^3 + 5 \Rightarrow dz = 3x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dz$.

c)

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \quad (x \geq 0!).$$

Oder mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{x} dx = x \cdot \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \int \sqrt{x} dx &= x \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dabei war

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$