Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2016**
Blatt 1 **14.04.2016**

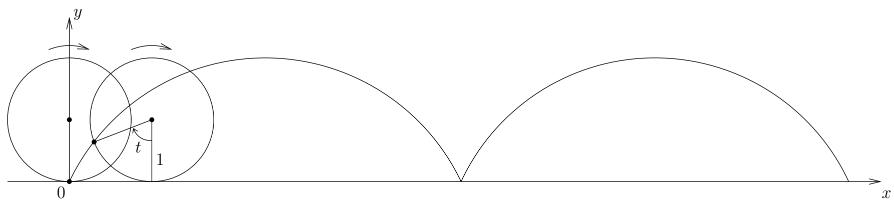
Aufgabe 1: Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die $1-$Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1), $(x_1, -x_1)$, die auf der $1-$Niveaulinie liegen. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

Aufgabe 2: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem einen festen Punkt auf einem Kreis von Radius 1 markiert, wobei der Kreis gleichmäßig mit Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang rollt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der markierte Punkt im Ursprung.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn um den Ursprung beschreibt. Beachten Sie die korrekte Drehrichtung und den Anfangspunkt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil $a)$ und $b)$ addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit auf dem Intervall $[0, 4\pi]$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad \text{mit} \qquad x^2 + y^2 < 1.$$

a) Worum handelt es sich bei dem Graphen dieser Funktion?

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt $(x, y, f(x, y))$.

d) Bestimmen Sie die Normale $N(x,y)$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt (x,y).

e) Geben Sie $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ und $N(x,y)$ für $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$ an.