Aufgabe 1: Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die $1-$Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1), $(x_1, -x_1)$, die auf der $1-$Niveaulinie liegen. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

LÖSUNG:

a) Die $1-$Niveaumenge ist gegeben durch

$$N_1(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

und ist ein Kreis mir Radius 1.
Die Stellen, an denen der Gradient berechnet werden soll werden wie folgt ermittelt

$$f(x_1, 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1,$$

$$f(0, x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1,$$

$$f(x_1, x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x_1, -x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Gradient der Funktion f an der Stelle (x_1, x_2) ist

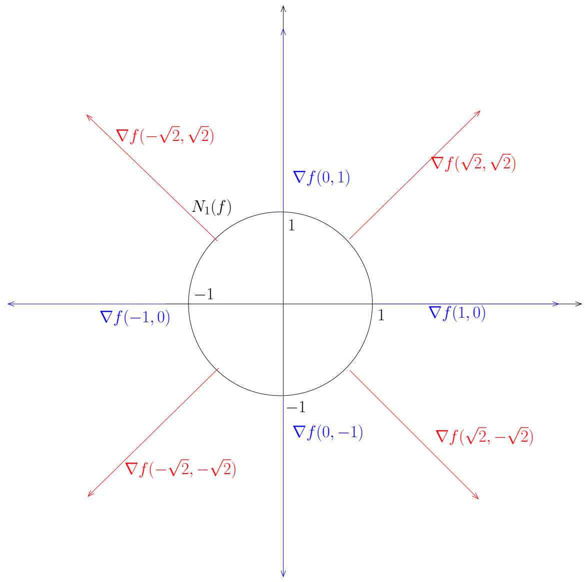
$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{grad} f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



b) Die 1−Niveaulinie ist gegeben durch

$$N_1(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

$$g(x_1, 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2 \text{ oder } x_1 = 2,$$
$$g(0, x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1$$

Bei $N_1(g)$ handelt es sich also um eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 1.

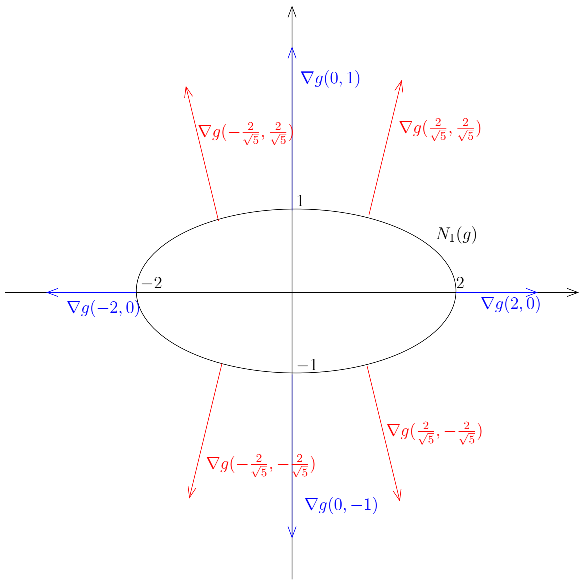
$$g(x_1, x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$g(x_1, -x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

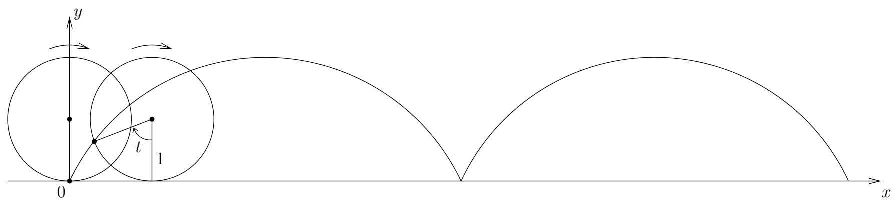
Der Gradient der Funktion g an der Stelle (x_1, x_2) ist

$$\text{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{grad} f(-2, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\text{grad} f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\text{grad} f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$
$$\text{grad} f(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem einen festen Punkt auf einem Kreis von Radius 1 markiert, wobei der Kreis gleichmäßig mit Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang rollt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der markierte Punkt im Ursprung.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn um den Ursprung beschreibt. Beachten Sie die korrekte Drehrichtung und den Anfangspunkt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit auf dem Intervall $[0, 4\pi]$.

LÖSUNG:

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wenn der Kreis nach rechts rollt, dreht er sich im Uhrzeigersinn. Für $t = 0$ soll der Punkt unterhalb des Mittelpunkts liegen, d.h. bei $(0, -1)$. Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit Mittelpunkt Null beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \gamma_M(t) + \gamma_P(t) \\ &= \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\|^2 &= (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \\ &= 1 - 2\cos(t) + 1 \\ &= 2 - 2\cos(t) \\ \|\dot\gamma(t)\| &= \sqrt{2 - 2\cos(t)}\end{aligned}$$

e) Da das Quadrieren auf den nichtnegativen reellen Zahlen streng monoton ist, und $\|\dot\gamma(t)\|$ nicht negativ wird, können wir statt $\|\dot\gamma(t)\|$ auch die Extrema von $\|\dot\gamma(t)\|^2$ betrachten.

Wir wissen, dass der Cosinus maximal wird für $t = 0, 2\pi, 4\pi$ und minimal für $t = \pi, 3\pi$ folglich nimmt der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 0, 2\pi, 4\pi$ sein Minimum und für $t = \pi, 3\pi$ sein Maximum an. Im Minimum beträgt der Betrag der Geschwindigkeit 0 und im Maximum 2.

Alternativ kann man diese Ergebnisse auch mittels erster und zweiter Ableitung nachrechnen. (Wahlweise für $2-2\cos(t)$ oder $\sqrt{2 - 2\cos(t)}$, mit der Wurzel wird die Rechnung aber etwas aufwändiger.)

Mit Hilfe der Additionstheoreme rechnet man alternativ

$$\begin{aligned}
\sqrt{2-2\cos(t)} &= \sqrt{2(1-\cos(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}))} \\
&= \sqrt{2\left(\sin^2(\frac{t}{2})+\cos^2(\frac{t}{2})-\left(\cos^2(\frac{t}{2})-\sin^2(\frac{t}{2})\right)\right)} \\
&= \sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})} \\
&= 2|\sin(\frac{t}{2})|
\end{aligned}$$

(man beachte den Betrag im letzten Schritt) und liest Minima und Maxima ebenfalls direkt ab. In diesem Fall benötigt man das Monotonie-Argument nicht.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

LÖSUNG:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

gesucht: Jacobi-Matrix und deren Determinante

$$\begin{aligned}
\mathbf{J_F}(r,\vartheta,\varphi) &= D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Denn: $\mathbf{J_F}(r,\vartheta,\varphi) = D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r F_1 & \partial_\vartheta F_1 & \partial_\varphi F_1 \\ \partial_r F_2 & \partial_\vartheta F_2 & \partial_\varphi F_2 \\ \partial_r F_3 & \partial_\vartheta F_3 & \partial_\varphi F_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
F_1(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\cos\varphi & F_2(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\
\partial_r F_1 &= \sin\vartheta\cos\varphi & \partial_r F_2 &= \sin\vartheta\sin\varphi \\
\partial_\vartheta F_1 &= r\cos\vartheta\cos\varphi & \partial_\vartheta F_2 &= r\cos\vartheta\sin\varphi \\
\partial_\varphi F_1 &= -r\sin\vartheta\sin\varphi & \partial_\varphi F_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(r,\vartheta,\varphi) &= r\cos\vartheta \\
\partial_r F_3 &= \cos\vartheta \\
\partial_\vartheta F_3 &= -r\sin\vartheta \\
\partial_\varphi F_3 &= 0
\end{aligned}$$

Berechnung der Determinante:
Regel von Sarrus

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(r,\vartheta,\varphi) &= \det D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + 0 \\
&= r^2\sin\vartheta\big(\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\big) \\
&= r^2\sin\vartheta\Big((\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\cos^2\varphi + (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\sin^2\varphi\Big) \\
&= r^2\sin\vartheta \cdot 1 \\
&= r^2\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Entwicklung nach der 3ten Spalte

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(r,\vartheta,\varphi) &= \det D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}(-r\sin\vartheta\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{2+3}(r\sin\vartheta\cos\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&= (r\sin\vartheta)\Big((-\sin\varphi) \cdot \big(-r\sin^2\vartheta\sin\varphi - r\cos^2\vartheta\sin\varphi\big) \\
&\quad +(-\cos\varphi)\left(-r\sin^2\vartheta\cos\varphi - r\cos^2\vartheta\cos\varphi\right)\Big) \\
&= (r\sin\vartheta)\left(r\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi\right) \\
&= (r^2\sin\vartheta) \cdot 1 \\
&= (r^2\sin\vartheta) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \text{mit} \qquad x^2+y^2<1.$$

a) Worum handelt es sich bei dem Graphen dieser Funktion?

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt $(x,y,f(x,y))$.

d) Bestimmen Sie die Normale $N(x,y)$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt (x,y).

e) Geben Sie $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ und $N(x,y)$ für $(x,y)=(0,0)$ und $(x,y) = (\frac{1}{2},0)$ an.

LÖSUNG:

a) Bei dem Graphen der Funktion f handelt es sich um die obere Hälfte der Einheitskugel (Kugel mit Radius 1) mit Mittelpunkt im Ursprung.

b)
$$\nabla f(x,y) = -\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

c)
$$\begin{aligned}
T_{(x,y,f(x,y))}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \sqrt{1-x^2-y^2}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
T_{(0,0,1)}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}\\
T_{(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\\
N\left(\frac{1}{2},0\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$