

Aufgabe 5: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

- a) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$ ja nein
- b) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = 0$ ja nein
- c) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = 0$ ja nein
- d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \, dx = 0$ ja nein
- e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+x^2} \sin x \, dx = 0$ ja nein

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die zu integrierenden Funktionen und deren Symmetrieeigenschaften. Es ist nicht sinnvoll, die Integrale jeweils explizit auszurechnen.

LÖSUNG: Benutze: $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$, wenn die Funktion $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dies folgt aus der Substitutionsregel. Durch Anfertigen einer Skizze erkennt man, dass dies bedeutet, dass die Gesamtfläche, welche die Funktion f im Intervall $[-a, a]$ mit der x-Achse einschließt Null ist.

- a) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^2 ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.
- b) Nein! Da der Integrand gerade und (außer in Null) positiv ist: Gesamtfläche ist positiv.
- c) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\frac{1}{1+x^2}$ ist gerade.
- d) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\cos x$ ist gerade.
- e) Ja! Da der Integrand ungerade ist: $\sqrt{1+x^2}$ ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. Vergleichen sie dazu $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2}$ mit dem Integral $\int_1^N \frac{1}{x^2} dx$.

LÖSUNG: Zuerst betrachten wir die Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und zeigen, dass sie streng monoton fallend ist.

Sei $n \in [1, \infty)$ beliebig und $\epsilon > 0$, dann gilt

$$f(n) = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n + \epsilon)^2} = f(n + \epsilon),$$

denn

$$n^2 < n^2 + 2n\epsilon + \epsilon^2 = (n + \epsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n + \epsilon)^2},$$

d.h. die Funktion f ist auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton fallend.

Daraus folgt für $n \geq 1$

$$\int_n^{n+1} f(x) dx > f(n+1)(n+1-n) = f(n+1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^N f(x) dx &= \sum_{m=1}^{N-1} \int_m^{m+1} f(x) dx \\ &> \sum_{m=1}^{N-1} f(m+1) \\ &= \sum_{n=2}^N f(n) \end{aligned}$$

Da

$$\int_1^N f(x) dx = \int_1^N \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^N = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

folgt

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ unabhängig von } N.$$

Die Reihe ist also beschränkt. Da die einzelnen Summanden alle positiv sind, ist die Reihe auch monoton wachsend, so dass sie für $N \rightarrow \infty$ konvergiert.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx,$

b) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx,$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$

Tipp: a), b) mit Substitutionsregel, bei c) betrachten Sie die Ableitung von $1 + \cos^2 x$.

LÖSUNG:

a)

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \int \frac{dz}{z} = \log |z| = \log |x^2 + 5|$$

Substitution:

$$z := x^2 + 5 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad dz = 2x dx$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+9x^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\frac{9x^2}{4}} = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{2}{3}dz}{1+z^2} = \frac{1}{6} \int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= \frac{1}{6} \arctan z = \frac{1}{6} \arctan \left(\frac{3x}{2} \right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution: $z := \frac{3x}{2} \Rightarrow z^2 = \frac{9x^2}{4}$ und $dz = \frac{3}{2} dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{3} dz$.

c) $(1 + \cos^2 x)' = -2 \cos x \sin x \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos^2 x)'}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(1 + \cos^2 x)]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 2) = 0\end{aligned}$$