Aufgabe 21: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \ ,$$

wobei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ ist.

Aufgabe 22: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
an. (ohne Rechnung)

Aufgabe 23: Betrachten Sie die Funktion $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2-1)^2$.

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1;1]$, d.h.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1;1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades

$$P_3(x) = \frac{3!}{6!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3.$$

Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur, und die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

Aufgabe 24: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

Aufgabe 25: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie beide Lösungen in der Form $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $x^2 + (1-3i)x - 2 - 2i = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}i = 0$

Tipp: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$