Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 11.

Abgabedatum: **11.07.2017**.

Aufgabe 1. (Implizites Euler-Verfahren)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t) \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -101 & 99 \\ 99 & -101 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $t \in [0,1]$ mit Startwert $u_0 = u(0)$. Bestimmen Sie die exakte Lösung $u(1)$ und die Approximation $u^{(m)}$ an $u(1)$ mit dem impliziten Euler-Verfahren. Wie klein muss die Schrittweite τ gewählt werden, damit

$$\|u^{(m)} - u(1)\|_2 \leq 10^{-2}\|u_0\|_2$$

gilt?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration)

Betrachten Sie die Fixpunktiteration zur Lösung der Rekursionsgleichung

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau f(t_{i+1}, u^{(i+1)})$$

des impliziten Euler-Verfahrens. Zeigen Sie explizit, dass die Fixpunktiteration konvergiert falls f Lipschitz-stetig ist, d.h.

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v - w\| \quad v, w \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],$$

und die Schrittweite $\tau < 1/L$ gewählt wird. Geben Sie eine Funktion f an, für die die Fixpunktiteration für die Wahl $\tau = 1/L$ divergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Stabilität Runge-Kutta-Verfahren)

Zeigen Sie Lemma 2.10 aus der Vorlesung:
Es seien $\{v^{(j)}\}_{j=k}^m \subset \mathbb{R}^d$ und $\{w^{(j)}\}_{j=k}^m \subset \mathbb{R}^d$ zwei Folgen, die rekursiv durch

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \tau_j \Phi(t_j, v^{(j)}, \tau_j),$$
$$w^{(j+1)} = w^{(j)} + \tau_j \Phi(t_j, w^{(j)}, \tau_j)$$

und Anfangswerten $w^{(k)}$ und $v^{(k)}$ gegeben sind. Dann gilt:

$$\|w^{(j)} - v^{(j)}\| \leq e^{(t_j - t_k)\Lambda}\|w^{(k)} - v^{(k)}\| \qquad \forall j \geq k.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Butcherschranken)

Zeigen Sie, dass ein m-stufiges, explizites Runge-Kutta-Verfahren höchstens die Konsistenzordnung m besitzt.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Schrittweitensteuerung)

Implementieren Sie die Lösung des Räuber-Beute-Modells

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \quad \text{mit} \quad f\big(t, u(t)\big) = \begin{bmatrix} \alpha u_1(t)(1 - u_2(t)) \\ u_2(t)(u_1(t) - 1) \end{bmatrix}, \ \alpha > 0.$$

Als Anfangswert sei $u_0 = [5, 0.1]^\intercal$ vorgegeben.

a) Schreiben Sie ein Programm

```
[t,u_1,u_2]= RKF3(u_0,alpha,eps),
```

welches das Anfangswertproblem für $\alpha = 6$ und Startschrittweite $\tau_0 = 1$ mit Hilfe des Runge-Kutta-Fehlberg RKF(3)-Verfahrens auf dem Intervall $[0, 8]$ löst. Der Vektor `t` soll hierbei die, entsprechend der Schrittweitensteuerung, berechneten Stützstellen enthalten.

b) Plotten Sie `u_1` und `u_2` für `eps` $= 10^{-2}$ in dieselbe Grafik und markieren Sie die Stützstellen auf der x-Achse.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 18.07.2017 und 19.07.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 10.07.2017–14.07.2017 aus.