Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 12.

Abgabedatum: **18.07.2017**.

Aufgabe 1. (A-Stabilität)

Zeigen Sie, dass explizite Runge-Kutta-Verfahren niemals A-stabil sind. Es empfiehlt sich dafür folgende Vorgenhensweise:

- Zeigen Sie, dass für ein explizites m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren angewendet auf das Anfangswertproblem $u'(t) = \lambda u(t)$ gilt

$$u^{(i+1)} = P(\tau\lambda)u^{(i)},$$

  wobei P ein Polynom von Grad kleiner gleich m ist.

- Folgern Sie, dass das Stabilitätsgebiet von expliziten Runge-Kutta-Verfahren beschränkt ist .

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Stabilitätsgebiete)

Es seien folgende Butcher-Tableaus gegeben:

a) $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

Um welche Verfahren handelt es sich dabei? Bestimmen Sie zu den Verfahren a) – c) die jeweiligen Stabilitätsgebiete und skizzieren Sie diese.

Hinweis: Bestimmen Sie beim Verfahren c) zunächst das reelle Stabilitätsintervall und verwenden Sie dann den Ansatz $z = -1 + re^{i\varphi}$ sowie $1 = R \cdot \bar{R}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Stabilitätsgebiete II)

Leiten Sie für folgende Verfahren jeweils die Stabilitätsfunktion her:

a) verbessertes Eulerverfahren;

b) klassisches Runge-Kutta-Verfahren der 4. Stufe.

Geben Sie außerdem für beide Verfahren das Stabilitätsgebiet, für b) zumindest das reelle Stabilitätsintervall an!

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Halbschrittverfahren)

Wir betrachten das *Halbschrittverfahren*

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau f\Big(t_i + \frac{1}{2}\tau, u^{(i)} + \frac{1}{2}\tau f(t_i, u^{(i)})\Big).$$

a) Bestimmen sie die Stabilitätsfunktion sowie das Stabilitätsintervall des Halbschrittverfahrens.

b) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $u'(t) = -10u(t)$ die maximale Schrittweite $\tau_{\max}$, so dass das Halbschrittverfahren noch stabil ist.

c) Bestimmen sie das Stabilitätsgebiet des Halbschrittverfahrens und skizzieren sie dies.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Steife Differentialgleichungen)

Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem: finde $u : [0,1] \times [0,1]$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \forall x \in (0,1),\ \forall t \in [0,1], \\ u(x,t) &= 0 && x = 0,\ x = 1,\ \forall t \in [0,1], \\ u_0(x,0) = u_0(x) &= \sin(\pi x) && \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung für dieses Problem ist gegeben durch $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x)$. Diskretisieren Sie den Ort mittels Finiter Differenzen (Schrittweite h) und die Zeit zum einen mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens und zum anderen mit Hilfe des impliziten *Radau3-Verfahrens* (Schrittweite τ). Das Butcher-Tableau des Radau3-Verfahrens ist gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}\,.$$

Testen Sie die Programme für die Ortsschrittweiten $h = 2^{-k}$ für $k \in \{2, 5, 10\}$ und Zeitschrittweiten $\tau = 4^{-\ell}$ für $\ell = 1, \dots, 6$. Geben Sie jeweils den maximalen Fehler der resultierenden Gitterfunktion im Vergleich zum exakten Funktionswert an. Plotten Sie zudem jeweils für $\tau = 4^{-\ell}$ und $\ell = 1, 4, 6$ die exakte Lösung und Ihre Approximationen zur Ortsschrittweite $h = 2^{-5}$ ausgewertet an der Stelle $x = 0.5$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 18.07.2017 und 19.07.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 10.07.2017–14.07.2017 aus.