Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 2.

Abgabedatum: **02.05.2017**.

Aufgabe 1. (Satz von Carathéodory)

Beweisen Sie den *Satz von Carathéodory*: Jeder Vektor x aus der konvexen Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ lässt sich als Konvexkombination von höchstens $d+1$ Elementen aus X darstellen.

Hinweis. Nach Lemma 1.5 der Vorlesung existiert eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sich für $m \geq d+2$ diese Darstellung um ein Element auf eine Summe von $m-1$ Elementen reduzieren lässt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Jensensche Ungleichung)

Zeigen Sie die folgende Aussage: Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Dann gilt für alle $\lambda_i \geq 0$ und $x_i \in X, i = 1, \ldots, m$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ stets:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Hesse-Matrix und konvexe Funktionen)

Gegeben sei eine offene konvexe Menge $D \subset \mathbb{R}^d$ sowie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to R$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann konvex wenn die Hesse-Matrix von f für alle $x \in D$ positiv semidefinit ist.

b) f ist strikt konvex falls die Hesse-Matrix von f für alle $x \in D$ positiv definit ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Gleichmässige Konvexität)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass diese Funktion strikt konvex, aber nicht gleichmässig konvex ist.

(4 Punkte)

Präsenzaufgabe 1. (Projektionseigenschaften konvexer Mengen)

a) Zeigen Sie die Eindeutigkeit aus Lemma 1.14 der Vorlesung: Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sowie $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Dann gibt es ein **eindeutig** bestimmtes $y \in X$ mit
$$\|y - x\| < \|z - x\| \quad \forall z \neq y, z \in X.$$

b) Zeigen Sie Lemma 1.16 aus der Vorlesung: Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gilt
$$\|\mathfrak{P}_X(y) - \mathfrak{P}_X(x)\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x, y \in X,$$
d.h. der Operator $x \mapsto \mathfrak{P}_X(x)$ ist Lipschitzstetig und beschränkt.

Präsenzaufgabe 2. (Minimalflächen)

Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix der Zielfunktion für das Minimalflächenbeispiel positiv semidefinit ist.