Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 3.

Abgabedatum: **09.05.2017**.

Aufgabe 1. (Projektionsoperator)

Zeigen Sie Lemma 1.17 aus der Vorlesung:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$\langle x - y, \mathfrak{P}_X(x) - \mathfrak{P}_X(y) \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Falls $\mathfrak{P}_X(x) \neq \mathfrak{P}_X(y)$, gilt sogar die strikte Ungleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Tangentialkegel und Normalkegel)

Zu einem Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x)$ kann man den zugehörigen **Normalkegel** als polaren Kegel $\mathcal{N}_X(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid \forall u \in \mathcal{T}_X(x) : v^T u \leq 0 \right\}$ definieren.
Zeigen Sie dazu folgende Aussagen:

a) Der Tangentialkegel ist ein abgeschlossener Kegel.

b) Der Normalkegel ist ein konvexer abgeschlossener Kegel.

Bemerkung: Eine Teilmenge M eines K-Vektorraumes (K geordneter Körper) heißt (linearer) Kegel, wenn für jedes $x \in M$ und jedes $\lambda \in K$, $\lambda \geq 0$ auch $\lambda x \in M$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (KKT-Bedingungen)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 6x - 4y \quad \text{und} \quad g(x, y) := \begin{pmatrix} y - 2 \\ x + y - 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$f(x, y) \to \min! \quad \text{auf} \quad M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0 \right\}$$

unter Verwendung der Bedingungen von Karush, Kuhn und Tucker.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Minimierung unter affinen Nebenbedingungen)
Vorgelegt sei das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - t)^4 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \begin{bmatrix} 1 - x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 + x_2 \\ 1 + x_1 - x_2 \\ 1 + x_1 + x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

wobei der Parameter $t \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen ist.

a) Für welche Werte von t erfüllt der Punkt $\mathbf{x}^\star = [1, 0]^T$ die KKT-Bedingungen?

b) Zeigen Sie, dass für $t = 1$ nur die erste Nebenbedingung an der Lösung aktiv ist und finden Sie die Lösung.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Quadratisches Programm)
Wir betrachten ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}x^\intercal Qx + c^\intercal x + \gamma,$$
$$\text{NB: } b_j^\intercal x = \beta_j \quad (j = 1, \dots, p)$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $c, b_j \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma, \beta_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, p$ gilt. Es handelt sich hierbei um ein sogenanntes quadratisches Programm mit Gleichheitsrestriktionen. Man kann nun zeigen, dass für ein lokales Minimum x^* dieses Optimierungsproblems Lagrange-Multiplikatoren $\mu_j^* \in \mathbb{R}$ existieren, so dass das Paar (x^*, μ^*) den KKT-Bedingungen

$$Qx + c + \sum_{j=1}^{p} \mu_j b_j = 0$$
$$b_j^\intercal x = \beta_j \quad (j = 1, \dots, p)$$

genügt.

a) Schreiben Sie die obigen KKT-Bedingungen als lineares Gleichungssystem um.

b) Betrachten Sie nun das folgende Beispiel:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} f(x) = \frac{5}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3^2 - 21x_1 - 60x_2 - 46x_3 + 5$$
$$NB: \; -x_1 + x_2 - x_3 = -5, \quad 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 37.$$

Schreiben Sie hierzu ein MATLAB Programm, welches eine KKT-Punkt sowie die dazugehörigen Lagrange-Multiplikatoren bestimmt.

(8 Punkte)

-

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 16.05.2017 und 17.05.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 08.05.2017–12.05.2017 aus.