Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universität bonn

Aufgabenblatt 4.

Abgabedatum: **16.05.2017**.

Aufgabe 1. (Constraint quantifications)

a) Wir betrachten die Minimierungsaufgabe

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x), \qquad f(x) = x_1^2 + (x_2+1)^2$$
$$\text{NB:} \quad -x_1^2 + x_2 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$$

Zeigen sie anhand dieses Beispieles, dass die Abadie-Bedingung die MFCQ-Bedingung nicht impliziert.

b) Wir betrachten die Minimierungsaufgabe

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x), \qquad f(x) = x_1^2 + (x_2+1)^2$$
$$\text{NB:} \quad -x_1^3 - x_2 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$$

Zeigen sie anhand dieses Beispieles, dass die MFCQ-Bedingung die LICQ-Bedingung nicht impliziert.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (MFCQ und Slater-Bedingung I)

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x), \qquad \text{NB:} \quad g_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m,$$

wobei die Funktion f, sowie die Funktionen g_i konvex seien. Zeigen Sie, dass die Slater-Bedingung die MFCQ-Bedingung impliziert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (MFCQ und Slater-Bedingung II)

Finden Sie ein Beispiel für ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x), \qquad \text{NB:} \quad g_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m,$$

wobei die Funktion f, sowie alle bis auf eine der Funktionen g_i konvex seien, so dass die Slater-Bedingung erfüllt, die MFCQ-Bedingung jedoch verletzt ist.

Hinweis. Es bietet sich an, eine quadratische Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die Minimierung zu betrachten, mit zwei Nebenbedingungen g_1, g_2, die am Minimum aktiv sind, wobei g_1 affin linear, also auch konvex, und g_2 von der Form $g_2 = x_1 \cdot x_2 - c$, also nicht konvex ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Globales Minimum in der konvexen Optimierung)

Beweisen sie die folgende Aussage:
Ist (x^*, λ, μ) ein KKT-Punkt für das konvexe Optimierungsproblem (Aufgabe 1.14 aus der VL), so ist x^* ein globales Minimum.

(4 Punkte)