Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 6.

Abgabedatum: **30.05.2017**.

Aufgabe 1. (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel)

a) Seien $U, V \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien regulär. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M := A + USV^T$$

genau dann invertierbar ist, falls

$$W := S^{-1} + V^T A^{-1} U$$

invertierbar ist und dass im Falle der Existenz von M^{-1} die folgende Formel gilt:

$$M^{-1} = A^{-1} - A^{-1}UW^{-1}V^T A^{-1}.$$

Hinweis: Multiplizieren Sie die Formel mit M.

b) Übertragen Sie das Resultat auf den Fall einer Rang-1-Modifikation $M = A + uv^T$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, um zu zeigen:

M ist genau dann invertierbar, wenn $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist dann

$$M^{-1} = \left(I - \frac{A^{-1}uv^T}{1 + v^T A^{-1} u} \right) A^{-1}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Regularität von Matrizen)

Zeigen sie Lemma 1.46 aus der Vorlesung:
Es sei $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch, positiv definit und $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ mit $\operatorname{Rang} B = n$. Dann ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} Q & B \\ B^\top & 0 \end{bmatrix}$$

regulär.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Normen und Orthonormalbasen)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $\|x\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} |x^\top z|$.

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt $\|xy^\top\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2$.

c) Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_d\}$ $\mathbb{R}^d$ lässt sich die Frobeniusnorm berechnen über

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{d} \|Av_i\|_2^2.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Powell-symmetric-Broyden-Formel)

Für ein Quasi-Newton-Verfahren nennt man die Forderung

$$A^{(k+1)}q^{(k)} = y^{(k)}$$

Quasi-Newton-Bedingung. Um aus einer gegebenen Matrix $A := A^{(k)}$ die Matrix des nächsten Iterationsschrittes $A_+ := A^{(k+1)}$ zu berechnen soll nun die folgende Quasi-Newton Aufdatierungsformel hergeleitet werden:
Seien $0 \neq q \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ und eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gegeben. Dann ist die eindeutige Lösung des Problems

$$\min \|A_+ - A\|_F \qquad \text{u. d. NB.} \qquad A_+q = y \quad A_+^\top = A_+,$$

gegeben durch die *Powell-symmetric-Broyden-Formel* (PSB-Formel):

$$A_+^{\mathrm{PSB}} = A + \frac{(y - Aq)q^\top + q(y - Aq)^\top}{q^\top q} - \frac{(y - Aq)^\top q}{(q^\top q)^2} qq^\top.$$

Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix A_+^{PSB} der Quasi-Newton-Bedingung und der Symmetrie-Bedingung genügt und somit für das Minimierungsproblem zulässig ist.
- Sei nun M eine beliebige Matrix welche den Nebenbedingungen des Minimierungsproblems genügt, sowie $v \in \mathbb{R}^d$ ein beliebeiger Vektor mit $q^\top v = 0$. Zeigen Sie die Abschätzung $\|(A_+^{\mathrm{PSB}} - A)v\|_2 \leq \|(M - A)v\|_2$ mit Hilfe von Aufgabenteil 3b).
- Betrachten Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$, welche den Vektor $v_1 = q/\|q\|_2$ enthält um die Abschätzung $\|A_+^{\mathrm{PSB}} - A\|_F \leq \|M - A\|_F$ mit Aufgabenteil 3c) zu zeigen.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Gradienten-Verfahren)

Schreiben Sie ein MATLAB/Octave Programm welches zu gegebener Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, Startnäherung $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, Toleranz $\varepsilon = 10^{-8}$ und maximaler Iterationszahl $it_{\max} = 20$ das Gradientenverfahren zur Bestimmung stationärer Punkte von F durchführt. Als Abbruchkriterium soll sowohl $\|\nabla F(x^{(n)})\|_2 \leq \varepsilon$ als auch $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_2 \leq \varepsilon$ erfüllt sein oder die maximale Iterationsanzahl erreicht sein. Zur Schrittweitensteuerung soll die Armijo-Regel mit den Parametern $\beta = 1/2$ sowie $\sigma = 10^{-4}$ eingesetzt werden.
Testen Sie ihr Verfahren anhand der folgenden zwei Beispiele, indem Sie die Iterationsanzahl sowie einen Konvergenzplot der Iterierten des Verfahrens im semilogarithmischen Plot ausgeben. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Newton-Verfahren und beurteilen sie welches Verfahren für diese Beispiele besser geeignet ist.

a) Betrachten Sie die Funktion von *Himmelblau*

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

und verwenden Sie als Startwerte $x^{(0)} = [0, 0]^\top$, $x^{(0)} = [2, 2]^\top$ sowie $x^{(0)} = [10, 10]^\top$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x$$

und verwenden Sie als Startwerte $x^{(0)} = 0$ sowie $x^{(0)} = -10$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 30.05.2017 und 31.05.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 22.05.2017–26.05.2017 aus.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 1.6. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 29.05., Di. 30.05. und Mi 31.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.