Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 8.

Abgabedatum: **20.06.2017**.

Aufgabe 1. (Räuber-Beute-Modell)

Die *Lotka-Volterra-Gleichungen*

$$y_1'(t) = y_1(t)(\alpha_1 - \beta_1 y_2(t))$$
$$y_2'(t) = y_2(t)(\beta_2 y_1(t) - \alpha_2)$$

beschreiben die Wechselwirkungen einer Räuberpopulation y_2 und der zugehörigen Beutepopulation y_1, wobei α_1 die Reproduktionsrate der Beute, α_2 die Sterberate der Räuber wenn keine Beute vorhanden ist, β_1 die Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen (Sterberate der Beute pro Räuber) und β_2 die Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen angeben. Wir setzen $\alpha_1 = 0.5$, $\beta_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 0.4$ und $\beta_2 = 0.004$. Zudem seien als Startpopulation ($t = 0$) 5000 Beutetiere und 1000 Räuber vorhanden. Zeigen Sie, dass es einen positiven Endzeitpunkt $T > 0$ gibt, so dass die Lotka-Volterra-Gleichungen auf $[0, T]$ eine eindeutige Lösung besitzen.

Hinweis. Sowohl die Wahl der Parameter als auch die Startpopulationen dienen lediglich der Einfachheit und zur Anschauung.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Transformation in ein System von Differentialgleichungen)

Transformieren Sie die Differentialgleichung 3. Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung und lösen Sie dieses:

$$y''' = 9y'' - 26y' + 24y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -3.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eindeutigkeit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[4]{|y|^3}, \quad y(0) = 0$$

nicht eindeutig lösbar ist. Weisen Sie weiter nach, dass dies nicht im Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf steht.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Stetige Abhängigkeit vom Anfangsdatum)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)^T (y-z) \leq l \, \|y-z\|_2^2$$

für alle (t,y), $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z \colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t,y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t,z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a,b) \subseteq (0,T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a,b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \, \|y_0 - z_0\|_2 \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Damit hängt $y' = f(t,y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t) \, dt$ mit $x(t)$ aus a) über geeigneten Integrationsgrenzen.

(4 Punkte)