Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 9.

Abgabedatum: **27.06.2017**.

Aufgabe 1. (Eulersches Polygonzug-Verfahren)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - t^3, \quad y(0) = 0.$$

Zur Schrittweite $h = T/n$ für ein festes $T > 0$ sollen mit dem expliziten Euler-Verfahren Näherungswerte $\eta(t_i, h)$ für $y(t_i)$ berechnet werden. Nehmen Sie $t_i = ih$ an, und berechnen Sie $\eta(t_i, h)$ sowie die exakte Lösung $y(t_i)$ und anschließend den Fehler $e(t_i, h) = \eta(t_i, h) - y(t_i)$ in Abhängigkeit von h und t_i. Zeigen Sie anschliessend, dass

$$\lim_{n\to\infty} e(T, T/n) = 0.$$

Hinweis. Sie dürfen folgende Summenformel verwenden:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Taylor-Verfahren)

Gegeben sei eine Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ und es sei $\Delta(t, y, h) := \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$.
Die Taylor-Reihe von $\Delta(t, y, h)$ lautet

$$\Delta(t, y, h) = y'(t) + \frac{h}{2} y''(t) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!} y^{(p)}(t) + \mathcal{O}(h^p).$$

Wegen $y^{(p+1)}(t) = (D_t^p f)(t, y(t))$ vereinfacht sich dies zu

$$\Phi(t, y(t), h) = f(t, y(t)) + \frac{h}{2} D_t f(t, y(t)) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!} (D_t^{p-1} f)(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^p).$$

Ein Lösungsverfahren p-ter Ordnung erhält man durch $y_{i+1} := y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$ unter Vernachlässigung des Terms $\mathcal{O}(h^p)$.
Formulieren Sie das Verfahren mit erster, zweiter und dritter Ordnung jeweils für die Anfangswertaufgaben

$$y'(t) = 2ty,\ y(t_0) = y_0 \quad \text{und} \quad y'(t) = \frac{1}{1+y^2},\ y(t_0) = y_0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Quadraturformeln und Eulerverfahren)

Sei die Anfangswertaufgabe – wie in der Vorlesung – umformuliert als folgende Integralgleichung:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, u(s))ds, \qquad k = 0, \ldots, m-1.$$

Für die linksseitige Rechtecksregel erhält man bekanntlich das explizite Eulerverfahren, für die rechtsseitige Rechtecksregel das implizite. Leiten Sie gleichermaßen für die Mittelpunktsregel sowie die Trapezregel entsprechende Verfahren her.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Differentialgleichungen zweiten Grades und Eulerverfahren)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades

$$y'' - y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung *ersten* Grades,

$$u' = f(t, u),\ u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

ist das Euler–Polygonzugverfahren mit Maschenweite h definiert durch

$$u_{i+1} := u_i + hf(t_i, u_i).$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Euler–Polygonzugverfahrens Näherungen für $y(1)$ und für $y'(1)$. Dabei sollen die Schrittweiten $h = 1/2$ und $h = 1/4$ verwendet werden.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Eulerverfahren)

Eine etwas vereinfachte Version des Räuber-Beute-Modell mit nur einem Parameter $\alpha > 0$ lautet:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \quad \text{mit} \quad f\big(t, y(t)\big) = \begin{bmatrix} \alpha y_1(t)(1 - y_2(t)) \\ y_2(t)(y_1(t) - 1) \end{bmatrix}.$$

Als Startwert setzen wir $y(0) = y_0 = [3, 1]^\intercal$. (Die Skalierung des vereinfachten Modells unterscheidet sich von den Lotka-Volterra Gleichungen vom letzten Zettel.)

a) Schreiben Sie ein Programm

`[y_1,y_2]=Explizit_Euler(y_0,n,alpha)`,

welches das Anfangswertproblem für $\alpha = 10$ mit Hilfe des expliziten Eulerschen Polygonzug-Verfahrens $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ auf dem Intervall $[0, 5]$ zur Schrittweite $h = 5/n$ löst.

b) Schreiben Sie ein Programm

`[x]=Fixpunkt(f,x_0,tol)`,

welches das nichtlineare Gleichungssystem $x = f(x)$ mit Hilfe einer Fixpunktiteration löst. Hierbei soll `f` ein Function Handle sein. Die zugehörige Iterationsvorschrift ist

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

mit $x_0 =$ `x_0`. Das Verfahren soll abgebrochen werden, wenn $\|f(x_i) - x_i\|_2 <$ `tol`.

c) Schreiben Sie ein Programm

`[y_1,y_2]=Implizit_Euler(y_0,n,alpha)`,

welches das Anfangswertproblem für $\alpha = 10$ mit Hilfe des impliziten Eulerschen Polygonzug-Verfahrens $y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ auf dem Intervall $[0, 5]$ zur Schrittweite $h = 5/n$ löst. Verwenden Sie die Funktion `Fixpunkt(f,x_0,tol)` um das nichtlineare Gleichungssystem

$$y_{i+1} = y_i - hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

für y_{i+1} zu lösen.

Plotten Sie `y_1` und `y_2` jeweils für `n` $= 1000$ und `tol` $= 10^{-6}$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 04.07.2017 und 05.07.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 26.06.2017–30.06.2017 aus.