Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Potenzreihenentwicklungen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$.

Tipp: Schreiben Sie die Restglieder jeweils mit Hilfe des universellen Symbols $O(\ldots)$.

LÖSUNG: a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{6}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin x}{\sin^3 x} &= \frac{x-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))^3} \\
&= \frac{x^3\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{6}x^2+O(x^4)\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right)}{\left(1-\frac{1}{6}x^2+O(x^4)\right)^3} \to \frac{1}{6} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5} = -\frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5} &= \frac{x(x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^6))-x^3}{x^5} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}+O(x^2)\right)x^5}{x^5} \\
&= -\frac{1}{2}+O(x^2) \to -\frac{1}{2} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \frac{(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5))-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{x^3} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+O(x^2) \\
&= \frac{3}{6}+O(x^2) = \frac{1}{2}+O(x^2) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} = -2$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\tan x}{x-\sin x} &= \frac{x-(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5))}{x-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))} \\
&= \frac{x^3(-\frac{1}{3}+O(x^2))}{x^3(\frac{1}{6}+O(x^2))} \\
&= \frac{-2+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -2 \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

LÖSUNG:

a) $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar.
Taylor ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+O(h^2)\\ f(x_0+2h) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot 2h+O(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))\\ = \quad & \underbrace{(-f(x_0)+4f(x_0)-3f(x_0))}_{=0}+(-f'(x_0)+2f'(x_0))\cdot 2h+O(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)}{2h} = f'(x_0)+O(h)\\ \Rightarrow \quad & \text{Beh.!}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2 \quad \in \mathcal{P}_2\\ p(x_0+h) &= a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2\\ &= a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_1h+a_2 2x_0h+a_2h^2\\ &= p(x_0)+(a_1+2a_2x_0)h+a_2h^2\\ p(x_0+2h) &= a_0+a_1(x_0+2h)+a_2(x_0+2h)^2\\ &= p(x_0)+(a_1+2a_2x_0)2h+a_24h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{-p(x_0+2h)+4p(x_0+h)-3p(x_0)}{2h}\\ = \quad & \frac{1}{2h}\underbrace{(-p(x_0)+4p(x_0)-3p(x_0))}_{=0}\\ & +\frac{1}{2h}\left(-(a_1+2a_2x_0)2h+2(a_1+2a_2x_0)2h\right)\\ & +\frac{1}{2h}\underbrace{(-4a_2h^2+4a_2h^2)}_{=0}\\ = \quad & a_1+2a_2x_0 = p'(x_0) \quad \checkmark\end{aligned}$$