Aufgabe 6: Berechnen Sie einen Näherungwert für $\frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$ durch numerische Approximation des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Teilen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in vier Teilintervalle und verwenden für jedes Teilintervall dieselbe Quadraturformel, nämlich

a) die Trapezregel bzw.

b) die Keplersche Fassregel.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

LÖSUNG:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$$

a) Trapezregel:

$$a = 0, b = 1, h = \frac{1}{4}, n = 4, f(x) = \frac{1}{1+x^2}\ :$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4}\left\{\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{16}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{9}{16}} + \frac{1}{4}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right\} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{4}{17} + \frac{1}{5} + \frac{4}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3}{16} + \frac{9}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3 \cdot 5^4 + 9 \cdot 16}{10000} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{1875 + 144}{10000} \\
&= \frac{2019}{10000} + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + 0,235294118 = 0,437194118
\end{aligned}$$

b) Simpsonregel:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{24}\left\{f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)\right.\\
&\quad \left.+4f\left(\frac{1}{8}\right)+4f\left(\frac{3}{8}\right)+4f\left(\frac{5}{8}\right)+4f\left(\frac{7}{8}\right)+f(1)\right\}\\
&= \frac{1}{24}\left\{1+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{16}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{16}}\right.\\
&\quad \left.+4\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{25}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{49}{64}}+\frac{1}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}+\frac{32}{17}+\frac{8}{5}+\frac{32}{25}+\frac{256}{65}+\frac{256}{73}+\frac{256}{89}+\frac{256}{113}\right]\\
&= \frac{1}{16}+\frac{4}{51}+\frac{1}{15}+\frac{4}{75}+\frac{32}{195}+\frac{32}{219}+\frac{32}{267}+\frac{32}{339}\\
&= 0,0625+0,078431373+0,066666667+0,053333333\\
&\quad +0,164102564+0,146118721+0,119850187+0,09439528\\
&= 0,785398125\approx 0,7854 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: Gegeben sei eine stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i,x_{i+1}]$ mit $x_i=\frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

a) Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)

b) Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

LÖSUNG: Um die Funktion f auf dem Teilintervall $[x_i,x_{i+1}]=[\frac{i}{4},\frac{i+1}{4}]$ durch eine affine Funktion zu approximieren benötigen wir zwei Lagrangepolynome. $L_i(x)$ und $L_{i+1}(x)$, wobei $L_i(x_i)=1$, $L_i(x_{i+1})=0$, $L_{i+1}(x_i)=0$ und $L_{i+1}(x_{i+1})=1$. Diese sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
L_i(x) &= \frac{\left(x-\frac{i+1}{4}\right)}{\left(\frac{i}{4}-\frac{i+1}{4}\right)}=-4x+(i+1)\\
L_{i+1}(x) &= \frac{\left(x-\frac{i}{4}\right)}{\left(\frac{i+1}{4}-\frac{i}{4}\right)}=4x-i
\end{aligned}
$$

a) Betrachtet man das Intervall $[\frac{i}{4},\frac{i+1}{4}]$, so handelt es sich bei der Fläche unter den beiden Funktion L_i und L_{i+1} jeweils um ein Dreieck mit denselben Seitenlängen. Somit gilt

$$\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_i(x)\,dx=\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_{i+1}(x)\,dx.$$

Des weiteren ist der Wert dieser Integrale für alle vier Teilintervalle gleich, so dass wir die Rechnung vereinfachen können, indem wir das Intervall $[0,\frac{1}{4}]$

betrachten.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{4}} L_0(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} -4x+1\,dx \\
&= -2x^2 + x\Big|_0^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

b) Um die Funktion f auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ zu integrieren, spalten wir das Integral in Teilintegrale über die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ auf. Des weiteren integrieren wir auf diesen Intervallen nicht die Funktion f, sondern ihre affine Approximation.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)L_i(x) + f(x_{i+1})L_{i+1}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)\,dx + f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i+1}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\
&= \frac{1}{8} \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4) \right]
\end{aligned}$$