Aufgabe 8: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4+3i)+2(6-2i) = ?$

b) $(4+3i)(6-2i) = ?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = ?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(4+3i)+2(6-2i) &= 4+3i+12-4i \\ &= 16-i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4+3i)(6-2i) &= 24+18i-8i+6 \\ &= 30+10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r = \frac{\sqrt{3+1}}{2} = 1, \qquad \sin\phi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Wegen $r = 1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\phi = \frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30°, also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= i\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig, $z = 1 + i \in \mathbb{C}$.

a) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Produktes ab zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ in der Darstellung $x + iy$ an.

b) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Produktes ab zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ in der Darstellung $re^{i\varphi}$ an.

c) Geben Sie z in der Form $z = re^{i\varphi}$ (mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) an.

Skizzieren Sie die Lage von z in der komplexen Ebene.

Zeichnen Sie in Ihre Skizze die Koordinaten r und φ (bzgl. der Darstellung $re^{i\varphi}$) sowie x und y (bzgl. der Darstellung $x + iy$) ein.

d) Geben Sie $-z$ in der Form $re^{i\varphi}$ (mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) an.

LÖSUNG:

a) $a = x_1 + iy_1$ und $b = x_2 + iy_2$, dann

$$ab = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

b) $a = r_1e^{i\varphi_1}$ und $b = r_2e^{i\varphi_2}$, dann

$$ab = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

c) $z = 1 + i$, dann $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arccos(1/r) = \frac{\pi}{4}$

d) Multiplikation mit -1 ist eine Drehung um π in der komplexen Ebene, also addiere π zu $\frac{\pi}{4}$ und erhalte $-z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Aufgabe 10: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

LÖSUNG:

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$
\begin{array}{llllll}
z^3 = -8 = 8e^{i\pi} & & & = 8e^{3i\pi} & & = 8e^{5i\pi} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{i\pi} & \text{oder} & z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 1 + i\sqrt{3} & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 1 - i\sqrt{3}
\end{array}
$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $\boxed{z_1 = -2}$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rcrcccc}
(z^3 & + & 8) & : & (z+2) & = & z^2 - 2z + 4 \\
-(z^3 & + & 2z^2) & & & & \\
\hline
-2z^2 & + & 8 & & & & \\
-(-2z^2 & - & 4z) & & & & \\
\hline
 & & 4z & + & 8 & & \\
 & & -(4z & + & 8) & & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Probe: $(z^2 - 2z + 4)(z + 2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$
\begin{aligned}
z^2 - 2z + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - 3i^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}},\ \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(1+2\sqrt{3}i-3\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-i^2\cdot 3\right) = (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark\\
\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^2\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^2 = i \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$\begin{aligned}
z^2 = 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 = -4i \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z^2}{4} = i \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{zi}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad zi = \pm\sqrt{2}(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}i(1+i) = \pm\sqrt{2}(i-1) \end{aligned}$$

Die vier Lösungen sind also

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\ z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\ z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\ z_4 &= \sqrt{2}(i-1) \end{aligned}$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$\begin{aligned} (2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\ (2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\ &= \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\,. \end{aligned}$$