Aufgabe 11: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: (I) Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe: } \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für $\lambda_2 = 4$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe:}\ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

(III) Es sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{B}$ lautet: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Offensichtlich gilt: $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$ und $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$ ($-1 = -1$ und $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$!
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist span $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
b) Für $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ gilt:

$$\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn λ_1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und $\frac{1}{\lambda_1}$ folglich ein Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$, so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und die Spiegelungsmatrix

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}^3,\ \|n\| = 1$$

orthogonal sind.
Sind sie auch symmetrisch?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} D^T D &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D \neq D^T$ für $\alpha \neq k\pi$
Die Drehmatrix D ist also orthogonal aber in der Regel nicht symmetrisch.

Die Spiegelungsmatrix S ist symmetrisch, denn

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\mathbb{1} - 2nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1}^T - 2\left(nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1} - 2n^{T^T} n^T \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T \\ &= S. \end{aligned}$$

Des weiteren ist sie auch orthognal, denn

$$\begin{aligned} S^T S = SS &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + 4n \underbrace{n^T n}_{=n\cdot n=1} n^T \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\ &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$