Aufgabe 14: Angenommen, wir werfen einen Ball senkrecht nach oben und vernachlässigen im Folgenden die Reibung. Wir lassen den Ball in einer Höhe von 1 m mit einer Geschwindigkeit von $20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ los und er erfahre die ganze Zeit über die (Erd-) Beschleunigung von $-10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Berechnen Sie die Funktion $h(t)$, die die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Lösen Sie dazu die Differentialgleichung
$$\ddot{h}(t) = -10$$
erst ohne und anschließend mit Anfangswerten.

b) Zu welcher Zeit $T > 0$ schlägt der Ball auf dem Boden auf, d. h. für welches $T > 0$ gilt $h(T) = 0$?

c) Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{h}(T)$ trifft der Ball auf der Erde auf?

LÖSUNG:

a) $\ddot{h}(t) = -10$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \dot{h}(t) &= \int_0^t \ddot{h}(s)\,ds + C_1 \\ &= \int_0^t -10\,ds + C_1 \\ &= -10t + C_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad h(t) &= \int_0^t \dot{h}(s)\,ds + C_2 \\ &= \int_0^t (-10s + C_1)\ ds + C_2 \\ &= -5t^2 + C_1 t + C_2\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung der Anfangswerte lautet
$$h(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte ergibt sich:
$$h(0) = C_2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$
$$\dot{h}(0) = C_1 \overset{!}{=} 20 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 20$$
und somit
$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

b)

$$\begin{array}{rrcl} & h(t) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -5t^2+20t+1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t^2-4t-\frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2-4-\frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2 & = & \frac{21}{5} \\ \Leftrightarrow & t & = & 2 \pm \sqrt{\frac{21}{5}} \approx -0{,}04939 \text{ oder } 4{,}04939 \end{array}$$

$\Rightarrow T = 2 + \sqrt{\frac{21}{5}} \approx 4{,}04939$

c)

$$\dot{h}(T) = -10\left(2+\sqrt{\frac{21}{5}}\right) + 20 = -10\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -20{,}4939$$

Aufgabe 15:

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bewegung eines Satelliten um die Erde ohne Berücksichtigung des Mondes beschreibt. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt.

b) Eine geostationäre Umlaufbahn ist (näherungsweise) eine Kreisbahn in Äquatorebene. Geben Sie eine Parametrisierung für eine beliebige Kreisbahn in Äquatorebene um den Ursprung an, die Radius r hat und in der Zeit T einmal die Erde umkreist hat. Den Startpunkt können Sie z.B. als $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.

c) Zeigen Sie, dass diese Kurve für geeignete r, T die Differentialgleichung löst. Welche Bedingung ergibt sich dabei für r und T?

d) Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde innerhalb eines siderischen Tages (23 h 56 m 4 s). Die Erdmasse beträgt $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie den Radius der geostationären Umlaufbahn.

e) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in geostationärer Umlaufbahn?

LÖSUNG:

a) Im Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen wurde der Fall eines Erdsatelliten, dessen Bahn durch die Gravitationskräfte der Erde und des Mondes bestimmt wird, behandelt. In diesem Fall ergab sich folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Bahn des Satelliten:

$$\ddot{x}_s = G\left(\frac{M_e}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) + \frac{M_m}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s)\right)$$

Da wir in dieser Aufgabe den Einfluss des Mondes ignorieren und das Koordinatensystem so legen, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\ddot{x}_s = -G\frac{M_e}{\|x_s\|^3}x_s$$

Da wir nun nur noch die Koordinaten des Satelliten haben, können wir das x_s durch ein einfaches x ersetzen.

$$\ddot{x} = -G\frac{M_e}{\|x\|^3}x$$

b) Allgemein ist die Parametrisierung einer Kreisbahn in der $x_1 - x_2$ Ebene mit Radius r, Mittelpunkt 0 und Startpunkt $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha t) \\ r\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei α die Umlaufgeschwindigkeit bestimmt.
Nun soll zusätzlich gelten

$$x(0) = x(T) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r\cos(0) \\ r\sin(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha T) \\ r\sin(\alpha T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es muss also gelten $\alpha T = 2\pi$ und somit ergibt sich die Parametrisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{2\pi}{T}t) \\ r\sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\ddot{x}(t) &= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}r\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}x(t)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} = -\frac{GM_e}{r^3} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{GM_eT^2}{4\pi^2}$$

d)

$$T = 23 \cdot 60^2\, s + 56 \cdot 60\, s + 4\, s = 86164\, s$$

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5,9736 \cdot 10^{24}\, kg \cdot (86164\, s)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\approx 42162664\, m \\ &\approx 42163\, km \end{aligned}$$

e)

$$\dot{x}(t) = \frac{2\pi r}{T} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\dot{x}(t)\| &= \frac{2\pi r}{T} \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \\ &= \frac{2\pi r}{T} \\ &\approx \frac{2\pi \cdot 42163000\, m}{86164\, s} \\ &\approx 3075\, \frac{m}{s} \end{aligned}$$