Aufgabe 18: Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy.$$

D. h. geben Sie neue Integrationsgrenzen an, so daß gilt:

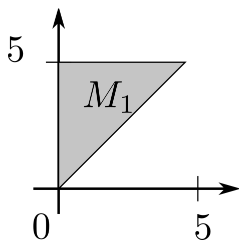
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy.$$

Dabei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

LÖSUNG: Im gegebenen Integral wird über die Fläche

$$M_1 := \{(x,y) : 0 \le x \le y \text{ und } 0 \le y \le 5\}$$

integriert. Diese sieht wie folgt aus



und läßt sich auch schreiben als

$$M_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 5 \text{ und } x \le y \le 5\}.$$

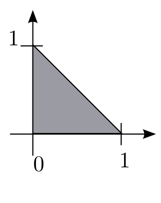
Es gilt also

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 \int_x^5 f(x,y)\,dy\,dx$$

Aufgabe 19: Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 y^2$$

über das in der folgenden Zeichnung dargestellte Gebiet



LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 \, dy dx &= \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} y^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{1}{3}(1-x)^3 \, dx \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}x^2(1-x)^4\Big|_0^1 + \frac{2}{4}\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx\right) \\
&= \frac{2}{3\cdot 4}\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx \\
&= \frac{1}{3\cdot 2}\left(-\frac{1}{5}x(1-x)^5\Big|_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 (1-x)^5 \, dx\right) \\
&= -\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5\cdot 6}(1-x)^6\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3\cdot 2\cdot 5\cdot 6} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Integration der Funktion $f(x, y)$ über das dargestellte Gebiet auch wie folgt ansetzen:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y^2 \, dx \, dy$$