Aufgabe 20: Berechnen Sie das Volumen des Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

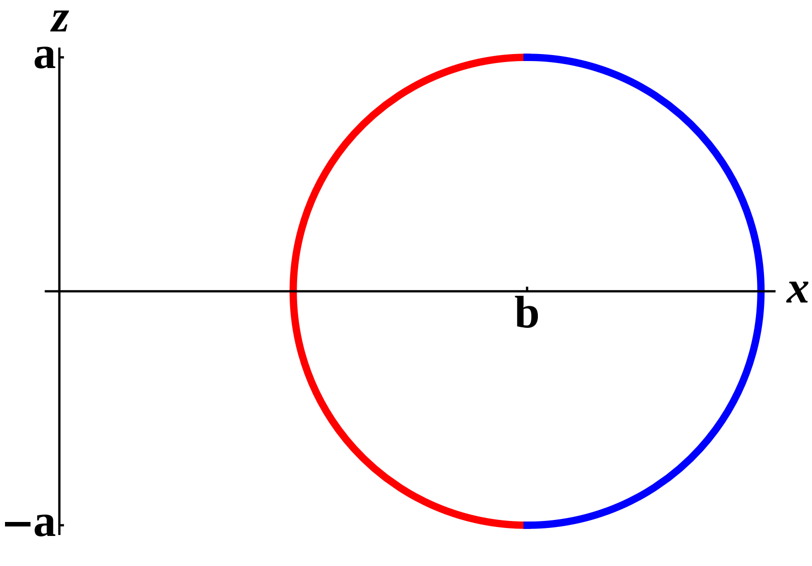
$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-b)^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

mit $0 < a < b$ um die z-Achse entsteht.
Tipp: Bei einem Integranden der Form $\sqrt{a^2 - z^2}$ und Integration in der Variablen z bietet sich die Substitution $z := a\sin(t)$ an.

LÖSUNG: Die Kreisscheibe liegt in der x,z-Ebene, hat den Mittelpunkt $(b, 0, 0)^T$ und den Radius a. Der Volltorus ergibt sich durch Rotation dieser Kreisscheibe um die z-Achse. Wir benötigen die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers, der um die z-Achse rotiert:

$$Vol(Rot) = \pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)^2 \; dz$$

Dabei ist $f(z)$ der Radius der Kreisscheibe in der x,y-Ebene, die durch die Rotation um die z-Achse entsteht.
Das Volumen des Volltorus ergibt sich aus der Differenz des Rotationskörpers, der von dem nach außen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (blau) und des Rotationskörpers, der von dem nach innen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (rot).



Aus der Beziehung $(x-b)^2 + z^2 = a^2$ erhalten wir die Radien. Sie lauten

$$f_1(z) = b - \sqrt{a^2 - z^2} \ldots \text{ innen,}$$

$$f_2(z) = b + \sqrt{a^2 - z^2} \ldots \text{ außen.}$$

Da der Mittelpunkt der rotierenden Kreisscheibe in der x, y-Ebene, also bei $z = 0$, liegt und die rotierende Kreischeibe den Radius a besitzt, gilt $-a \leq z \leq a$. Das Volumen des Volltorus ist folglich:

$$\begin{aligned}
Vol(\,Volltorus) &= \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz - \pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz \\
&= \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz \\
&= \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - z^2} \; dz
\end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir eine Koordinatentransformation (Substitution!) durch:

$$z = z(t) = a \sin t, \; dz = a \cos t \; dt \; ,$$

$$-a \leq z \leq a \implies -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Damit vereinfacht sich das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}
Vol(\,Volltorus) &= \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - z^2} \; dz \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ab \cos t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \; dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b \cos^2 t \; dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b \left(\frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \right) \; dt \\
&= 4\pi a^2 b \left[\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi a^2 b \left[\frac{\pi}{2} \right] \\
&= 2\pi^2 a^2 b \; .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Formel

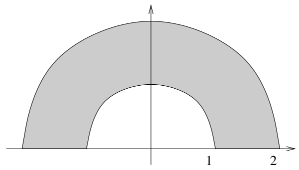
$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \; ,$$

verwendet, die sich aus dem Additionstheorem der Cosinus-Funktion

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$$

und der bekannten Formel $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ ergibt. (Alternativ: partielle Integration)

Aufgabe 21: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



LÖSUNG: Polarkoordinaten: $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \phi \leq \pi$
Berechnung der Masse:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi 1\, r\, d\phi\, dr = \pi \int_1^2 r\, dr = \frac{3}{2}\pi$$

Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \sin\phi\, r\, d\phi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) \\
&= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{28}{9\pi} \approx 0{,}99
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes x_S offensichtlich 0, siehe auch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \cos\phi\, r\, d\phi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \cos\phi\, d\phi \\
&= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (\sin\pi - \sin 0) \\
&= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$