Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 (x+1)e^x \,\mathrm{d}x \,.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin(x)+1}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Lösung: a)

$$\int_0^1 (x+1)e^x \,\mathrm{d}x = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = (2e-1) - [e^x]_0^1 = (2e-1)-(e-1) = e$$

b) Substitution $y = \sin(x)+1$, $dy = \cos(x)\,dx$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin(x)+1}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})+1}^{\sin(\pi)+1} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2: Sei

$$f(x) = \sin^2(x)\,.$$

Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom p, das f in den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ und $x_2 = \pi$ interpoliert.

Lösung: Es gilt

$$f(x_0) = f(0) = 0, \quad f(x_1) = f(\pi/2) = 1, \quad f(x_2) = f(\pi) = 0\,.$$

Gesucht: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $p(0) = 0,\ p(\pi/2) = 1,\ p(\pi) = 0$

Lagrangeformel:

$$p(x) = \sum_i f(x_i) p_i(x) \quad \text{mit} \quad p_i(x) = \Pi_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,,$$

also $p(x) = 1\, p_1(x)$ mit

$$p_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = -\frac{4}{\pi^2} x(x-\pi) = \frac{4}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x^2\,.$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} p(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0 \\ p(\pi/2) = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \frac{\pi^2}{4} = 1 \\ &\Rightarrow \quad 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 4 \quad \mathrm{I} \\ p(\pi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1\pi + a_2\pi^2 = 0 \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi = 4 \ \Rightarrow\ a_1 = \frac{4}{\pi}$, einsetzen in II: $4 + a_2\pi^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

Aufgabe 3: a) Lösen Sie $z^2 + 4z + 8 = 0$ für $z \in \mathbb{C}$.

b) Sei $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Geben Sie $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ abhängig von r und ϕ an.

Lösung: a) $z = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$.

b) Es gilt $z = re^{i\phi} = r\,(\cos(\phi) + i\,\sin(\phi))$, also $\mathrm{Re}(z) = r\,\cos(\phi)$ und $\mathrm{Im}(z) = r\,\sin(\phi)$.