Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2017**
Blatt 1 **18.04.2017**

Aufgabe 1: Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + px + q, \;\; p, q \in \mathbb{R}$

b) $g(s) = \sqrt{4 + s^2}$

c) $h(u) = \frac{\sin(u)}{2+\cos^2(u)}$

d) $k(y) = 2ye^{-y^2}$

LÖSUNG:

a) $f'(x) = 2x + p$

b) $g'(s) = \frac{1}{2}\frac{2s}{\sqrt{4+s^2}} = \frac{s}{\sqrt{4+s^2}}$

c) $h'(u) = \frac{\cos(u)(2+\cos^2(u)) - \sin(u)2\cos(u)(-\sin(u))}{(2+\cos^2(u))^2} = \frac{\cos(u)(2+\cos^2(u)+2\sin^2(u))}{(2+\cos^2(u))^2} = \frac{\cos(u)(3+\sin^2(u))}{(2+\cos^2(u))^2}$

d) $k'(y) = 2e^{-y^2} + 2ye^{-y^2}(-2y) = e^{-y^2}(2 - 4y^2)$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Punkte:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Ebene, welche die 3 Punkte enthält. Geben Sie dabei die Ebene sowohl in Parameterdarstellung

$$\{p + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

als auch in Normalendarstellung

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = d\}$$

an.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches durch die Punkte P_0, P_1, P_2 gegeben ist.

LÖSUNG:

a) Wir betrachten P_0 als Ortsvektor (Stützvektor) und bestimmen die Richtungen der Ebene durch:

$$P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Parameterdarstellung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir eine Normalenrichtung:

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch einsetzen eines Punktes der Ebene erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Damit ist die Normalendarstellung gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 1.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Betrag des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren gleich dem Flächeninhalt des durch die Richtungsvektoren aufgespannten Parallelograms ist. Somit gilt für das Dreieck $\frac{\sqrt{3}}{2}$, da $\|n\| = \sqrt{3}$.

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(A)$.

iii) Berechnen Sie $\mathrm{Bild}(A)$.

iv) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A)$.

LÖSUNG:

a) Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 6 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) i) Nach der Produktregel für Determinanten gilt:

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 6$$

ii) Da R als Resultat der Gauß-Elimination keine Nullzeile enthält, ist $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

iii) Wegen $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ muss $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ gelten.

iv) Entsprechend ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x, y) := x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Funktionswerte $f(0,0)$, $f(2,0)$, $f(0,2)$, $f(-2,0)$, $f(0,-2)$, $f(2,2)$, $f(2,-2)$, $f(-2,2)$, $f(-2,-2)$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) für die gilt $f(x, y) = 0$, d.h. die Niveaulinien zum Wert 0.

c) Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x, y)$.

d) Berechnen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$.

e) Skizzieren Sie die 0-Niveaulinien und alle Punkte und Funktionswerte aus Teilaufgabe d) im $\mathbb{R}^2$.
Tragen Sie auch die Punkte und Funktionswerte aus Teilaufgabe a) ein.

LÖSUNG:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 1, \\
f(2,0) &= -3, \\
f(0,2) &= -3, \\
f(-2,0) &= -3, \\
f(0,-2) &= -3, \\
f(2,2) &= 9, \\
f(-2,2) &= 9, \\
f(2,-2) &= 9, \\
f(-2,-2) &= 9.
\end{aligned}$$

b) Da $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = (x^2-1)(y^2-1)$ gilt $f(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$ oder $y = \pm 1$. Daher gilt:

$$N_0(f) = \{(x,y) |\ x = 1\} \cup \{(x,y) |\ x = -1\} \cup \{(x,y) |\ y = 1\} \cup \{(x,y) |\ y = -1\}.$$

c) Es gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 - 2x \\ 2x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(y^2-1) \\ 2y(x^2-1) \end{pmatrix}.$$

d) Es muss gelten $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, d.h. $f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$. Betrachten wir zunächst $f_x(x,y) = 0$, dann gilt

$$2xy^2 - 2x = 2x(y^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad (y^2-1) = 0, \text{ d.h. } y = \pm 1.$$

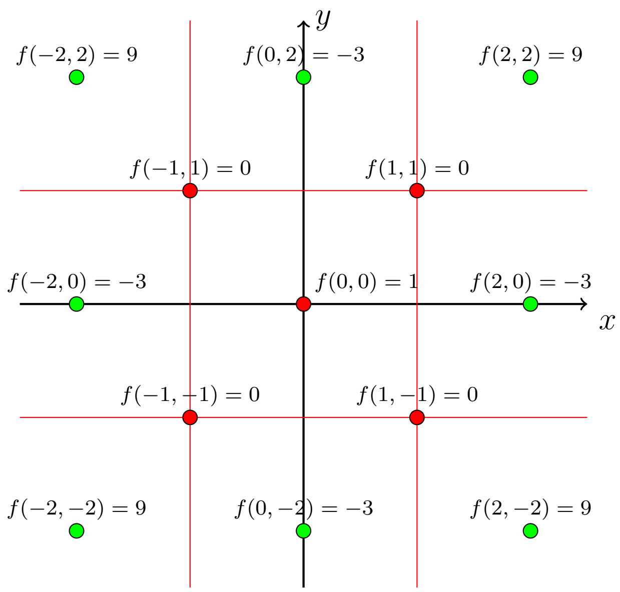
Nun ist die Frage wann gilt für diese 3 Fälle, dass $f_y(x,y) = 2x^2y - 2y = 2y(x^2-1) = 0$?

1.Fall $x = 0$**:** Hier gilt $f_y(0,y) = 2y(0^2-1) = -2y = 0$ genau dann, wenn $y = 0$. Somit ist $P_1 = (0,0)$ ein kritischer Punkt.

2.Fall $y = 1$**:** Hier gilt $f_y(x,1) = 2 \cdot 1(x^2-1) = 2(x^2-1) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Somit sind $P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (-1,1)$ kritische Punkte.

3.Fall $y = -1$**:** Hier gilt $f_y(1,y) = 2 \cdot (-1)(x^2-1) = -2(x^2-1) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Somit sind $P_4 = (1,-1)$ und $P_5 = (-1,-1)$ kritische Punkte.

e)



y
$f(-2,2)=9$
$f(0,2)=-3$
$f(2,2)=9$
$f(-1,1)=0$
$f(1,1)=0$
$f(-2,0)=-3$
$f(0,0)=1$
$f(2,0)=-3$
x
$f(-1,-1)=0$
$f(1,-1)=0$
$f(-2,-2)=9$
$f(0,-2)=-3$
$f(2,-2)=9$