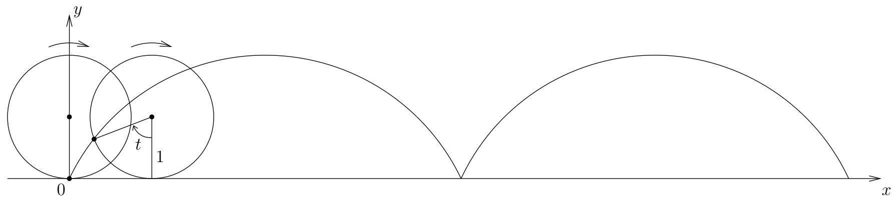
Aufgabe 5: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem einen festen Punkt auf einem Kreis von Radius 1 markiert, wobei der Kreis gleichmäßig mit Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang rollt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der markierte Punkt im Ursprung.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn um den Ursprung beschreibt. Beachten Sie die korrekte Drehrichtung und den Anfangspunkt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit auf dem Intervall $[0, 4\pi]$.

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x, y) = xy$ definiert ist.

a) Zeichnen Sie die Niveaumengen von f zu den Werten -1, 0 und 1.

b) Zeichnen Sie die Graphen der (eindimensionalen) Funktionen, die sich für $y = x$ und $y = -x$ (d.h. als Schnitte entlang der Winkelhalbierenden) ergeben.

c) An welchem Punkt ist $\mathrm{grad} f(x, y) = 0$?

d) Handelt es sich dabei um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder keines von beidem?

Aufgabe 7: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \qquad \text{und} \\ d(x_1, x_2, x_3) &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \end{aligned}$$

wobei h, r positiv seien und $0 \leq t \leq 6\pi$ gelte. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) := d(\gamma(t))$$

a) direkt, d. h. indem Sie zuerst $f(t)$ berechnen und danach $f'(t)$.
b) mit Hilfe der Kettenregel.
c) Beschreiben Sie die durch $\gamma(t)$ gegebene Kurve im $\mathbb{R}^3$ und skizzieren Sie diese Kurve.

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &h(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &g(x, y, z) := x - z = 0 \\ &\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

a) Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

b) Finden Sie einen Punkt P auf der Schnittmenge mit $x = 1$.

c) Berechnen Sie den Gradienten ∇h, ∇g an dem Punkt P und nutzen sie, um eine Tangentenvektor der Schnittmenge zu finden.