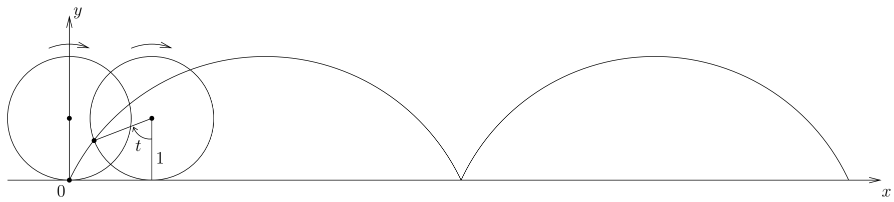
Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2017**
Blatt 2 **25.4.2017**

Aufgabe 5: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem einen festen Punkt auf einem Kreis von Radius 1 markiert, wobei der Kreis gleichmäßig mit Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang rollt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der markierte Punkt im Ursprung.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn um den Ursprung beschreibt. Beachten Sie die korrekte Drehrichtung und den Anfangspunkt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil *a*) und *b*) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit auf dem Intervall $[0, 4\pi]$.

LÖSUNG:

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wenn der Kreis nach rechts rollt, dreht er sich im Uhrzeigersinn. Für $t = 0$ soll der Punkt unterhalb des Mittelpunkts liegen, d.h. bei $(0, -1)$. Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit Mittelpunkt Null beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_M(t) + \gamma_P(t) \\ &= \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \\ &= 1 - 2\cos(t) + 1 \\ &= 2 - 2\cos(t) \\ \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

e) Da das Quadrieren auf den nichtnegativen reellen Zahlen streng monoton ist, und $\|\dot{\gamma}(t)\|$ nicht negativ wird, können wir statt $\|\dot{\gamma}(t)\|$ auch die Extrema von $\|\dot{\gamma}(t)\|^2$ betrachten.

Wir wissen, dass der Cosinus maximal wird für $t = 0, 2\pi, 4\pi$ und minimal für $t = \pi, 3\pi$ folglich nimmt der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 0, 2\pi, 4\pi$ sein Minimum und für $t = \pi, 3\pi$ sein Maximum an. Im Minimum beträgt der Betrag der Geschwindigkeit 0 und im Maximum 2.

Alternativ kann man diese Ergebnisse auch mittels erster und zweiter Ableitung nachrechnen. (Wahlweise für $2-2\cos(t)$ oder $\sqrt{2-2\cos(t)}$, mit der Wurzel wird die Rechnung aber etwas aufwändiger.)

Mit Hilfe der Additionstheoreme rechnet man alternativ

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - 2\cos(t)} &= \sqrt{2(1 - \cos(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}))} \\ &= \sqrt{2\left(\sin^2(\frac{t}{2}) + \cos^2(\frac{t}{2}) - \left(\cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})\right)\right)} \\ &= \sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})} \\ &= 2|\sin(\frac{t}{2})| \end{aligned}$$

(man beachte den Betrag im letzten Schritt) und liest Minima und Maxima ebenfalls direkt ab. In diesem Fall benötigt man das Monotonie-Argument nicht.

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x, y) = xy$ definiert ist.

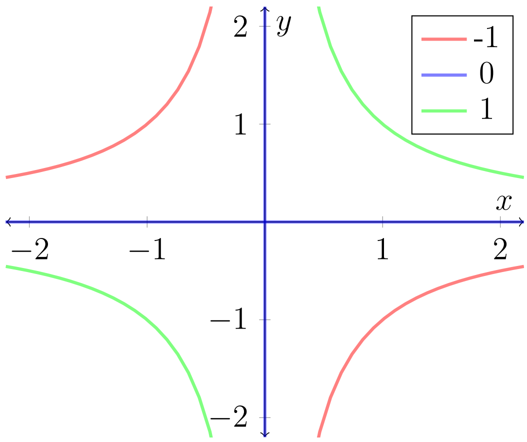
a) Zeichnen Sie die Niveaumengen von f zu den Werten -1, 0 und 1.

b) Zeichnen Sie die Graphen der (eindimensionalen) Funktionen, die sich für $y = x$ und $y = -x$ (d.h. als Schnitte entlang der Winkelhalbierenden) ergeben.

c) An welchem Punkt ist $\operatorname{grad} f(x, y) = 0$?

d) Handelt es sich dabei um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder keines von beidem?

LÖSUNG:

a) 

b) $f(x,x) = x^2$, $f(x,-x) = -x^2$.

c) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, also ist $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.

d) Keines von beidem. (Es handelt sich um einen Sattelpunkt.)

Aufgabe 7: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ d(x_1, x_2, x_3) &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \end{aligned}$$

wobei h, r positiv seien und $0 \leq t \leq 6\pi$ gelte. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) := d(\gamma(t))$$

a) direkt, d. h. indem Sie zuerst $f(t)$ berechnen und danach $f'(t)$.
b) mit Hilfe der Kettenregel.
c) Beschreiben Sie die durch $\gamma(t)$ gegebene Kurve im $\mathbb{R}^3$ und skizzieren Sie diese Kurve.

LÖSUNG:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \ h, r > 0, 0 \leq t \leq 6\pi$$

$$d(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

a)

$$\begin{aligned}
f(t) := d(\gamma(t)) &= \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 + (ht)^2} \\
&= \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + h^2t^2} \\
&= \sqrt{r^2 + h^2t^2} \quad (\text{wegen } \cos^2 t + \sin^2 t = 1) \\
\Rightarrow \; f'(t) &= \frac{2h^2t}{2\sqrt{r^2+h^2t^2}} = \frac{h^2t}{\sqrt{r^2+h^2t^2}}
\end{aligned}$$

nach der Kettenregel für Funktionen einer Variablen!

b) Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \; f'(t) &= \underbrace{\nabla d(\gamma(t))}_{\textit{Zeile}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\textit{Spalte}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2t^2}}(r\cos t, r\sin t, ht) \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \\
&= \frac{h^2t}{\sqrt{r^2+h^2t^2}},
\end{aligned}$$

denn $\nabla d(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_1,x_2,x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ und $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$.

c) $\gamma(t)$ beschreibt eine Schraubenlinie/Helix mit Anfangspunkt $\gamma(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix}, \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ h\frac{3\pi}{2} \end{pmatrix},$$

$$\gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ h2\pi \end{pmatrix}, \ldots, \gamma(6\pi) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ h6\pi \end{pmatrix}$$

h: Ganghöhe, 1 Umdrehung: 2π, tatsächliche Höhe $2\pi h$ nach einer Umdrehung, hier 3 Umdrehungen: $6\pi = 3 \cdot 2\pi$

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g(x,y,z) &:= x - z = 0 \\ \mathbf{f}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

b) Finden Sie einen Punkt P auf der Schnittmenge mit $x = 1$.

c) Berechnen Sie den Gradienten ∇h, ∇g an dem Punkt P und nutzen sie, um eine Tangentenvektor der Schnittmenge zu finden.

LÖSUNG:

a) It's an intersection between a cylinder aligned with the z-axis and with radius 1 and a plane with normal $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ that goes through the origin. The intersection is an ellipse.

b) If $x = 1$ then because $g(x,y,z) = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow z = x = 1$ and also $h(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = 0$. So the point is $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) We have $\nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ at P. The gradients are normal to the sets $h(x,y,z) = 0$ and $g(x,y,z) = 0$ and therefore to the intersection. It follows that a tangent vector $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ of the intersection needs to be normal to both gradients $v \cdot \nabla h = v \cdot \nabla g = 0$, and so

$$v. \cdot \nabla h = 0 \Rightarrow 2v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

and

$$v \cdot \nabla g = 0 \Rightarrow v_1 - v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = v_1 = 0$$

We conclude that any vector of the form $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ is tangent to the intersection at P.