Aufgabe 5: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)
$$\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$$

b)
$$\int_0^2 (2x+3)(x^2+3x+2)\,dx$$

LÖSUNG:

a) Substitution: $y = x^2+3x+2$, „$dy = (2x+3)dx$“

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \int_2^{12} \frac{1}{y}\,dy = \ln(y)|_2^{12} = \ln(12) - \ln(2) = \ln(12/2) = \ln(6)$$

b) Substitution: $y = x^2+3x+2$, „$dy = (2x+3)dx$“

$$\int_0^2 (2x+3)(x^2+3x+2)\,dx = \int_2^{12} y\,dy = \frac{1}{2}y^2|_2^{12} = \frac{1}{2}(12^2-2^2) = 70$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$,

b) $\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$,

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x} dx$

Tipp: a), b) mit Substitutionsregel, bei c) betrachten Sie die Ableitung von $1+\cos^2 x$.

LÖSUNG:

a)
$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log|x^2+5|$$

Substitution:
$$z := x^2+5 \geq 5 \;\Rightarrow\; dz = 2x\,dx$$

b)
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{9x^2}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2}{3}dz}{1+z^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= \frac{1}{6}\arctan z = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3x}{2}\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution: $z := \frac{3x}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{9x^2}{4}$ und $dz = \frac{3}{2}\,dx \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{2}{3}dz$.

c) $(1+\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos^2 x)'}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln(1+\cos^2 x)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 2) = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 7: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx = 0$ ja ☐ nein ☐

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 0$ ja ☐ nein ☐

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = 0$ ja ☐ nein ☐

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x\,dx = 0$ ja ☐ nein ☐

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+x^2}\sin x\,dx = 0$ ja ☐ nein ☐

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die zu integrierenden Funktionen und deren Symmetrieeigenschaften. Es ist nicht sinnvoll, die Integrale jeweils explizit auszurechnen.

LÖSUNG: Benutze: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, wenn die Funktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ ungerade ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dies folgt aus der Substitutionsregel.
Durch Anfertigen einer Skizze erkennt man, dass dies bedeutet, dass die Gesamtfläche, welche die Funktion f im Intervall $[-a,a]$ mit der x-Achse einschließt Null ist.

a) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^2 ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

b) Nein! Da der Integrand gerade und (außer in Null) positiv ist: Gesamtfläche ist positiv.

c) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\frac{1}{1+x^2}$ ist gerade.

d) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\cos x$ ist gerade.

e) Ja! Da der Integrand ungerade ist: $\sqrt{1+x^2}$ ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. Vergleichen sie dazu $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$ mit dem Integral $\int_1^N \frac{1}{x^2}dx$.

LÖSUNG: Zuerst betrachten wir die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ und zeigen, dass sie streng monoton fallend ist.

Sei $n \in [1, \infty)$ beliebig und $\epsilon > 0$, dann gilt

$$f(n) = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\epsilon)^2} = f(n+\epsilon),$$

denn

$$n^2 < n^2 + 2n\epsilon + \epsilon^2 = (n+\epsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\epsilon)^2},$$

d.h. die Funktion f ist auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton fallend.
Daraus folgt für $n \geq 1$

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx > f(n+1)(n+1-n) = f(n+1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_1^N f(x)\,dx &= \sum_{m=1}^{N-1} \int_m^{m+1} f(x)\,dx \\ &> \sum_{m=1}^{N-1} f(m+1) \\ &= \sum_{n=2}^{N} f(n) \end{aligned}$$

Da

$$\int_1^N f(x)\,dx = \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^N = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ unabhängig von } N.$$

Die Reihe ist also beschränkt. Da die einzelnen Summanden alle positiv sind, ist die Reihe auch monoton wachsend, so dass sie für $N \to \infty$ konvergiert.