Aufgabe 9: Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

$$\text{a)} \int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx\,, \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin^4 x\,dx\,,$$
$$\text{c)} \int_{-\pi}^\pi \sin^5 x\,dx\,, \quad \text{d)} \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,dx\,.$$

LÖSUNG:

a) $\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx = \frac{3}{10}(e^\pi + 1)$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \sin(3x),\ g'(x) = 3\cos(3x)$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= e^x \sin(3x)\big|_0^\pi - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= e^\pi \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} - e^0 \underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{=\sin(0)=0} - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3e^x \cos(3x)\big|_0^\pi - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \qquad (*) \\
&= -3e^\pi \underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos(\pi)=-1} + 3e^0 \underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{=\cos(0)=1} - \\
&\qquad 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \\
&= 3(e^\pi + 1) - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx. \\
\Rightarrow\ 10\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= 3(e^\pi + 1).\ \Rightarrow\ \text{Beh.!}
\end{aligned}$$

(*) Partielle Integration mit: $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \cos(3x),\ g'(x) = -3\sin(3x)$.

b) $\int\limits_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3\pi}{8}$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x,\ g(x) = \sin^3 x,\ g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin x \sin^3 x\, dx &= -\cos x \sin^3 x|_0^\pi + 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\
&= 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\, dx \qquad (\text{da } \sin 0 = \sin\pi = 0) \\
&= 3\int_0^\pi (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, dx \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,!) \\
&= 3\int_0^\pi \sin^2 x\, dx - 3\int_0^\pi \sin^4 x\, dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^4 x\, dx &= \frac{3}{4}\int_0^\pi \sin^2 x\, dx. \\
\int_0^\pi \sin^2 x\, dx &= \int_0^\pi \sin x \sin x\, dx \\
&= -\cos x \sin x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx \\
&= \int_0^\pi \cos^2 x\, dx \quad (-\cos x \sin x|_0^\pi = 0,\ \text{da}\ \sin 0 = \sin\pi = 0) \\
&= \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx \\
&= \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2 x\, dx &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\ dx = 0$, da $f(x) = \sin^5 x$ ungerade ist: $f(-x) = [\sin(-x)]^5 = [-\sin x]^5 = -\sin^5 x = -f(x)$.

d) Nach b) gilt (Zwischenergebnis dort):

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \, .$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

LÖSUNG:

a)

$$\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left. \frac{-\cos 2x}{2} \right|_0^\pi = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \big(x - \ln(1+x^2) \big)\big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

c)

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \ (2xe^x)\big|_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2$$

Aufgabe 11: Berechnen Sie mit der Methode zum Integrieren rationaler Funktionen, die in der Vorlesung beschrieben wurde, die Integrale

$$\text{a)} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6} \, dx \ , \quad \text{b)} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} \, dx \, .$$

LÖSUNG:

a) Der Nenner des Integranden lässt sich schreiben als

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung sieht also wie folgt aus

$$\frac{2x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ A &= \left(\frac{2x-1}{x+3} - \frac{(x-2)B}{x+3}\right)\Bigg|_{x=2} = \frac{2\cdot 2-1}{2+3} = \frac{3}{5}, \\ B &= \left(\frac{2x-1}{x-2} - \frac{(x+3)A}{x-2}\right)\Bigg|_{x=-3} = \frac{2\cdot(-3)-1}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x+3} = \frac{3(x+3)+7(x-2)}{5(x-2)(x+3)} = \frac{10x-5}{5(x^2+x-6)} = \frac{2x-1}{x^2+x-6}. \quad \checkmark$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,dx &= \int \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x+3}\,dx \\ &= \frac{3}{5}\log|x-2| + \frac{7}{5}\log|x+3|. \end{aligned}$$

b) Der Nenner lässt sich schreiben als

$$x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1.$$

Da die Ableitung des Nenners wie folgt aussieht

$$(x^2-2x+2)' = 2x-2,$$

lässt sich das Integral am günstigsten wie folgt umschreiben:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{2x-2}{(x-1)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx.$$

Da sich

$$\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log((x-1)^2+1)$$

mit der Substitution $z = 1+(x-1)^2,\ dz = 2(x-1)\,dx$ ergibt, und

$$\int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z = \arctan(x-1)$$

mit Hilfe der Substitution $z = x-1,\ dz = dx$ folgt, ergibt sich als Gesamtlösung

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \log((x-1)^2+1) + \arctan(x-1).$$

Aufgabe 12: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned}
\beta(w) &= \arctan(w),\\
w(\epsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\,w_0,\\
w_0 &= \tan B = w(0).
\end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w-w_0|^2)$.
- Entwickeln Sie $w(\epsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.
- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

LÖSUNG:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\beta(w)$ um w_0 so erhalten wir also

$$\beta(w) = \arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

Nun betrachten wir $w(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}w_0$.

$$\begin{aligned}
w'(\epsilon) &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}w_0\\
w''(\epsilon) &= -\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}w_0\\
w'''(\epsilon) &= -\frac{3\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}}w_0
\end{aligned}$$

$$w(\epsilon) = w_0 - \frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0) &= \arctan w(\epsilon) - \arctan w_0\\
&= \frac{w(\epsilon)-w_0}{1+w_0^2} + O(|w(\epsilon)-w_0|^2),\\
w(\epsilon) - w_0 &= -\frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4)\\
&= -\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $w(\epsilon) - w_0 = O(\epsilon^2)$.

Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned}
\beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)}{1 + \tan^2 B} + O\underbrace{\left(|w(\epsilon) - w_0|^2\right)}_{=O((\epsilon^2)^2)} \\
&= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1 + \tan^2 B} + O(\epsilon^4).
\end{aligned}$$