Aufgabe 9: a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

Aufgabe 10: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

Aufgabe 11: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

Aufgabe 12: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.