Aufgabe 9: a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

LÖSUNG:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar.
Taylor ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + O(h^2) \\ f(x_0+2h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)) \\ = \quad & \underbrace{(-f(x_0)+4f(x_0)-3f(x_0))}_{=0} + (-f'(x_0)+2f'(x_0))\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)}{2h} = f'(x_0) + O(h)$$

$\Rightarrow$ Beh.!

b)

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \in \mathcal{P}_2 \\
p(x_0+h) &= a_0 + a_1(x_0+h) + a_2(x_0+h)^2 \\
&= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_1 h + a_2 2x_0 h + a_2 h^2 \\
&= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)h + a_2 h^2 \\
p(x_0+2h) &= a_0 + a_1(x_0+2h) + a_2(x_0+2h)^2 \\
&= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)2h + a_2 4h^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{-p(x_0+2h) + 4p(x_0+h) - 3p(x_0)}{2h} \\
= \quad & \frac{1}{2h}(\underbrace{-p(x_0) + 4p(x_0) - 3p(x_0)}_{=0}) \\
& + \frac{1}{2h}\left(-(a_1+2a_2x_0)2h + 2(a_1+2a_2x_0)2h\right) \\
& + \frac{1}{2h}(\underbrace{-4a_2h^2 + 4a_2h^2}_{=0}) \\
= \quad & a_1 + 2a_2 x_0 = p'(x_0) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe 10: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x \ln x} \\
x_0 &= 3 \\
\\
f(3) &= 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\
f'(x) &= \left(e^{x \ln x}\right)' \\
&= e^{x \ln x} \cdot \left\{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right\} \\
&= x^x \cdot (\ln x + 1) \\
f'(3) &= 3^3 \cdot (\ln 3 + 1) \\
&= 27 \cdot (1 + \ln 3) \\
&= 27 + 27 \cdot \ln 3 \\
&\approx 27(1 + 1{,}098612289) \\
&\approx 56{,}66253179 \quad \text{(Taschenrechner)}
\end{aligned}$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$ZD_f(x_0,h) \;=\; \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$h=10^{-1}=\frac{1}{10},\; h=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100},\; h=10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{10}:\; ZD_f(3,\frac{1}{10}) &= \frac{f(3{,}1)-f(2{,}9)}{1/5}\\
&= 5\cdot\big((3{,}1)^{3{,}1}-(2{,}9)^{2{,}9}\big)\\
&\approx 5\cdot(33{,}35963198-21{,}92573667)\\
&\approx 5\cdot 11{,}43389531\\
&\approx 57{,}16947654\\
|Fehler| &\approx 57{,}16947654-56{,}66253179\approx 0{,}50694475
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{100}:\; ZD_f(3,\frac{1}{100}) &= 50\cdot\big((3{,}01)^{3{,}01}-(2{,}99)^{2{,}99}\big)\\
&\approx 50\cdot(27{,}5730718-26{,}43972009)\\
&\approx 50\cdot 1{,}13335171\\
&\approx 56{,}66758548\\
|Fehler| &\approx 56{,}66758548-56{,}66253179\approx 0{,}005053685
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{1000}:\; ZD_f(3,\frac{1}{1000}) &= 500\cdot\big((3{,}001)^{3{,}001}-(2{,}999)^{2{,}999}\big)\\
&\approx 500\cdot(27{,}05672654-26{,}94340137)\\
&\approx 500\cdot 0{,}113325166\\
&\approx 56{,}66258295\\
|Fehler| &\approx 56{,}66258295-56{,}66253179\approx 0{,}00005116
\end{aligned}$$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$VD_f(x_0,h) \;=\; \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{10}:\; VD_f(3,\frac{1}{10}) &\approx 63{,}59631979\\
|Fehler| &\approx 6{,}933787997
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{100}:\; VD_f(3,\frac{1}{100}) &\approx 57{,}30718008\\
|Fehler| &\approx 0{,}64464829
\end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{1000}: \; VD_f(3, \frac{1}{1000}) \approx 56{,}7265386$$
$$|Fehler| \approx 0{,}06400681$$

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$ZD_f(3,h)$	0,507	0,00505	0,0000512
$VD_f(3,h)$	6,93	0,645	0,0640

Man sieht gut die unterschiedliche Approximationsordnung: Beim Vorwärts-Differenzenquotienten wird der Fehler um den Faktor 10 kleiner, wenn man h durch 10 teilt (Ordnung $O(h)$). Beim zentralen Differenzenquotienten wird der Fehler bei der Zehntelung von h um den Faktor 100 kleiner (Ordnung $O(h^2)$).

Aufgabe 11: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

LÖSUNG:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$
\begin{aligned}
p(0) = 2 &\;\Rightarrow\; a_0 = 2 \\
p(1) = 4 &\;\Rightarrow\; 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\;\Leftrightarrow\; a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \text{I} \\
p(3) = 5 &\;\Rightarrow\; 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\;\Leftrightarrow\; a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \text{II} \\
p(4) = 10 &\;\Rightarrow\; 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\;\Leftrightarrow\; a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \text{III}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} - \text{I}: &\quad 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\text{III} - \text{I}: &\quad 3a_2 + 15a_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_2 = -5a_3 \\
&\quad \Rightarrow\; -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
&\quad \Leftrightarrow\; 2a_3 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \frac{1}{2} \\
&\quad \Rightarrow\; a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow &\quad a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow &\quad p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}
$$

<u>Probe:</u>

$$
\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$

mit:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{19}{12}x+1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3-\frac{7}{6}x^2+2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \left(-\frac{2}{12}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}+\frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad+\left(\frac{4}{3}-\frac{14}{3}+\frac{25}{6}-\frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad+\left(-\frac{19}{6}+8-\frac{10}{3}+\frac{5}{2}\right)x \\
&\quad+2\cdot 1 \\
&= 2+4x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(5) &= 2+20-\frac{125}{2}+\frac{125}{2}=22\\
\tilde{p}(x) &= p(x)+0{,}02\cdot p_2(x)\\
\Rightarrow\ \tilde{p}(5) &= p(5)+0{,}02\cdot p_2(5)\\
&= 22+\frac{2}{100}\cdot\left(-\frac{125}{6}+\frac{125}{6}-\frac{10}{3}\right)\\
&= 22-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\\
&= 22-\frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x)=\sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x)-p(x)|$ in $x=\frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\\
f(0) &= \sin 0 = 0\\
f(\pi/2) &= \sin(\pi/2)=1\\
f(\pi) &= \sin(\pi)=0\\
f(\pi/4) &= \sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Gesucht: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ mit $p(0)=0,\ p(\pi/2)=1,\ p(\pi)=0$

Lagrangeformel: $p(x)=0\,p_0(x)+1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x)+0\,p_\pi(x)$

$$
\begin{aligned}
p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}\\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)=\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
p(0)=0 &\ \Rightarrow\ a_0=0\\
p(\pi/2)=1 &\ \Rightarrow\ a_1\frac{\pi}{2}+a_2\frac{\pi^2}{4}=1\\
&\ \Rightarrow\ 2a_1\pi+a_2\pi^2=4 \quad \mathrm{I}\\
p(\pi)=0 &\ \Rightarrow\ a_1\pi+a_2\pi^2=0 \quad \mathrm{II}
\end{aligned}
$$

I-II: $a_1\pi=4\ \Rightarrow\ a_1=\frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4+a_2\pi^2=0\ \Leftrightarrow\ a_2=-\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4)-f(\pi/4)|=0,75-0,707106781\approx 0,042893219$$