Aufgabe 13: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

a) Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad m

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bzgl. $f(x)$ für $m = 4, 8, 16$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Nutzen Sie zum aufstellen und lösen des Gleichungssystems Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $p_m(x)$.

b) Bestimmen Sie die stückweise affine Interpolation $s_m(x)$ bzgl. $f(x)$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

für $m = 4, 8, 16$ mittels Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $s_m(x)$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Verfahren.

Aufgabe 14: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-1; 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2 - 1)^2.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1; 1]$, d.h.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1; 1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades

$$P_3(x) = \frac{3!}{6!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3.$$

Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur.

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

Aufgabe 15: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ numerisch mit Hilfe der Gauss-Quadratur aus der Vorlesung. Berechnen Sie sowohl die 1-Punkt als auch die 2-Punkt Gauss-Quadratur (d.h. $n=0$ und $n=1$), wobei $a=0$, $b=1$ und $f(x)=x^3+3x^2-x+1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Aufgabe 16: Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `TrapezIntegration(a,b,h)`, welche das Integral über eine gegebene Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit der Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

berechnet. Die Argumente `a,b` sind die Intervallgrenzen, `h` ist die Feinheit der Intervallzerlegung. Verwenden Sie bitte folgendes Programmgerüst:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion
% mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  ...
end

% Hauptprogramm:
...

end
```

Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [0,1]$. Erstellen Sie eine Konvergenztabelle für die Gitterfeinheiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$, d. h. berechnen Sie zu diesen Feinheiten den Fehler zwischen dem berechneten und dem exakten Wert des Integrals.