Aufgabe 13: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

a) Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad m

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bzgl. $f(x)$ für $m = 4, 8, 16$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Nutzen Sie zum aufstellen und lösen des Gleichungssystems Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $p_m(x)$.

b) Bestimmen Sie die stückweise affine Interpolation $s_m(x)$ bzgl. $f(x)$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

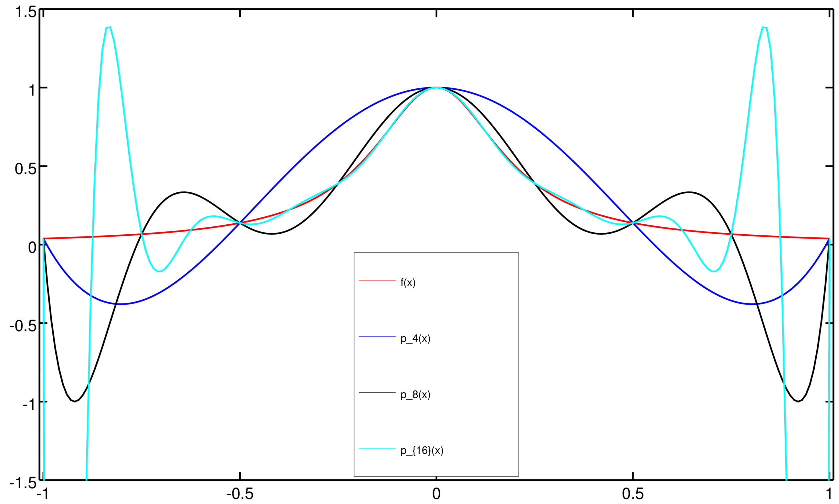
für $m = 4, 8, 16$ mittels Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $s_m(x)$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Verfahren.

LÖSUNG:

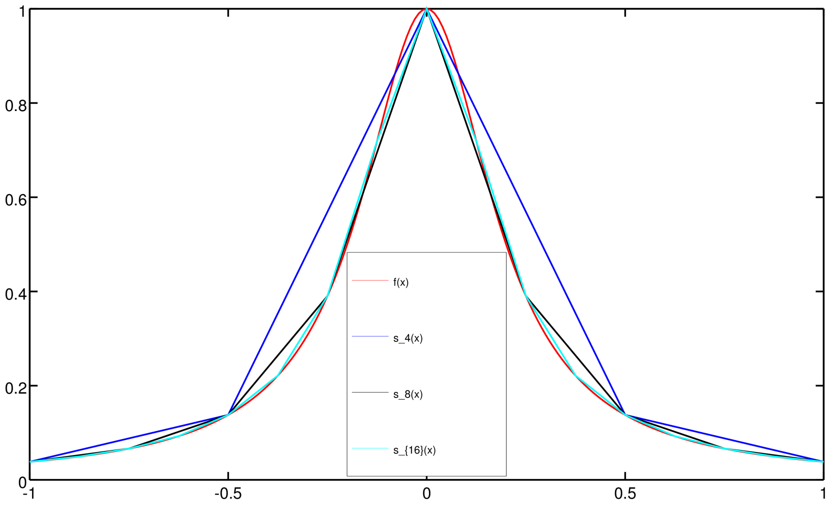
a)
```
function RungesPhaenomen()

    % Intervall x = [-1,1]
    x = erzeugeGitter( 200 );

    % Berechung von Rungesfunktion auf Intervall x
    f = RungesFunktion( x );

    % Berechnung der Polynomkoeffizienten fuer m = 4,8,16
    a_4 = polynomInterpolation( 4 );
    a_8 = polynomInterpolation( 8 );
    a_16 = polynomInterpolation( 16 );

    % Berechnung der dazugehoerigen Polynome p_m
    p_4 = polynom( a_4, x );
    p_8 = polynom( a_8, x );
    p_16 = polynom( a_16, x );

    % Visualisierung
    figure;
    hold on;
    plot( x, f, 'r','linewidth',3 );
    plot( x, p_4, 'b','linewidth',3 );
    plot( x, p_8, 'k','linewidth',3 );
    plot( x, p_16, 'c','linewidth',3 );
    axis([-1.01 1.01 -1.5 1.5]);
```

```
  h = legend('f(x)','p_4(x)','p_8(x)','p_{16}(x)','Location','south');
  set(gca, 'linewidth', 3, 'fontsize', 30,'interpreter','tex');
  set (h, 'fontsize', 20);
  set (h, 'fontweight', 'bold');
  hold off;
endfunction

% Erzeugung eines Gitters mit N + 1 Stuetzstellen
function x = erzeugeGitter( N )
  for i=1:N+1
    x(i) = 2 * (i - 1) / N - 1;
  end
endfunction

% Funktion zur Berechnung der Polynomkoeffizienten a
% des Polynominterpolationsproblems
function a = polynomInterpolation( m )
  % Stuetzstellen x_i
  for i=1:m+1
    x_i(i) = 2 * (i - 1) / m - 1;
  end
  % Aufstellen der Vandermonde-Matrix
  for i=1:m+1
    for j=1:m+1
      A(i,j) = x_i(i)^(j-1);
    end
  end
  % Aufstellen der rechten Seite b_i = f(x_i)
  for i=1:m+1
    b(i,1) = RungesFunktionswert( x_i(i) );
  end
  % Loesen des Gleichungssystems
  a = A\b;
endfunction

% Funktion zur Berechnung eines Polynoms vom Grad m
% auf dem Intervall x mit N + 1 Stuetzstellen
function p = polynom( a , x )
  % Anzahl der Intervalle
  N = length(x)-1;
  % Polynomgrad
  m = length(a)-1;
  % Initialisierung mit 0
  p = zeros(N+1,1);
  for i=1:N+1
    for j=1:m+1
      p(i) = p(i) + a(j) * x(i)^(j-1);
    end
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) auf dem Interval x
function f = RungesFunktion(x)
  % Anzahl der Intervalle
```




```
  N = length(x) - 1;
  for i=1:N+1
    f(i) = RungesFunktionswert( x(i) );
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) an der Stelle x_i
function f = RungesFunktionswert( x_i )
  f = 1/(1 + 25 * x_i^2);
endfunction
```

b)
```
function StueckweiseInterpolation()

  % Intervall x = [-1,1]
  x = erzeugeGitter( 200 );

  % Berechung von Rungesfunktion auf Intervall x
  f = RungesFunktion( x );

  % Berechnung der Stuetzstellen fuer m = 4,8,16
  x_4 = erzeugeGitter( 4 );
  x_8 = erzeugeGitter( 8 );
  x_16 = erzeugeGitter( 16 );

  % Berechnung der dazugehoerigen stueckweise affinen Funktionen s_m
  s_4 = RungesFunktion( x_4 );
  s_8 = RungesFunktion( x_8 );
  s_16 = RungesFunktion( x_16 );

  % Visualisierung
  figure;
  hold on;
  plot( x, f, 'r','linewidth',3 );
  plot( x_4, s_4, 'b','linewidth',3 );
```




```
  plot( x_8, s_8, 'k','linewidth',3 );
  plot( x_16, s_16, 'c','linewidth',3 );
  h = legend( 'f(x)','s_4(x)', 's_8(x)', 's_{16}(x)','Location','south');
  set(gca, 'linewidth', 3, 'fontsize', 30,'interpreter','tex');
  set (h, 'fontsize', 20);
  set (h, 'fontweight', 'bold');
  hold off;
endfunction

% Erzeugung eines Gitters mit N + 1 Stuetzstellen
function x = erzeugeGitter( N )
  for i=1:N+1
    x(i) = 2 * (i - 1) / N - 1;
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) auf dem Interval x
function f = RungesFunktion(x)
  % Anzahl der Intervalle
  N = length(x) - 1;
  for i=1:N+1
    f(i) = RungesFunktionswert( x(i) );
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) an der Stelle x_i
function f = RungesFunktionswert( x_i )
  f = 1/(1 + 25 * x_i^2);
endfunction
```

c) Bei der Polynominterpolation in Teilaufgabe a) wächst der Fehler mit steigendem Polynomgrad m (und entsprechend steigender Anzahl an Stützstellen x_i). Bei der stückweise affinen Interpolation in Teilaufgabe b) sinkt der Fehler mit steigender Anzahl an Stützstellen x_i.

Aufgabe 14: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-1;1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2-1)^2.$$

a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1;1]$, d.h.
$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$
Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1;1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades
$$P_3(x) = \frac{3!}{6!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3.$$
Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur.

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

LÖSUNG:

a) Zur Berechnung des Integrals betrachten wir die Monome der Funcktion $f(x)$, d.h. $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx &= \int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = [(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1)+(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1)]\\ &= \frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2 = \frac{1}{15}(6-20+30) = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir die Lagrange-Funcktion L_0. Hier gilt
$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{x+\frac{1}{3}}{-1+\frac{1}{3}}\,\frac{x-\frac{1}{3}}{-1-\frac{1}{3}}\,\frac{x-1}{-1-1}\\ &= \frac{x^3 - x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}}{-\frac{16}{9}} = -\frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\end{aligned}$$
und somit
$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{8}.$$
Da das Gewicht unabhängig vom konkreten Intervall ist, kann man sich mit den Knoten $0, 1, 2, 3$ auf dem Intervall $[0;3]$ die Rechnung deutlich vereinfachen.

Aufgrund der Symmetrie gilt $\omega_3 = \frac{1}{8}$, also $\omega_1 + \omega_2 = \frac{6}{8}$. Wieder aufgrund der Symmetrie erhalten wir $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{8}$.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{3} w_i \cdot f(x_i)\\ &= 2\cdot(\frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81} + \frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81} + \frac{1}{8}\cdot 0) = \frac{96}{81} = \frac{32}{27} \neq \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

c) Das Legendre-Polynom dritten Grades lautet

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Die Nullstellen der Funktion sind die Quadratur-Punkte, d.h.

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}L_1(x) &= \frac{x-\sqrt{\frac{3}{5}}}{0-\sqrt{\frac{3}{5}}}\frac{x+\sqrt{\frac{3}{5}}}{0+\sqrt{\frac{3}{5}}}\\ &= \frac{x^2-\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}x^2+1\end{aligned}$$

und somit

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{4}{9}.$$

Aufgrund der Addition zur Eins Eigenschaft, d.h. $\omega_0+\omega_1+\omega_2 = 1$ und der Symmetrie, d.h. $\omega_0 = \omega_2$, erhalten wir $\omega_0 = \omega_2 = \frac{5}{18}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{2} w_i \cdot f(x_i)\\ &= 2\cdot(\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25} + \frac{4}{9}\cdot 1 + \frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25}) = \frac{2}{9}\frac{4}{5} + \frac{8}{9} = \frac{8+8\cdot 5}{45} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}\end{aligned}$$

Aufgabe 15: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ numerisch mit Hilfe der Gauss-Quadratur aus der Vorlesung. Berechnen Sie sowohl die 1-Punkt als auch die 2-Punkt Gauss-Quadratur (d.h. $n=0$ und $n=1$), wobei $a=0$, $b=1$ und $f(x) = x^3+3x^2-x+1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung.

LÖSUNG: Die Gauss-Quadratur approximiert das Integral einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(\tilde{x}_i),$$

wobei

$$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i$$

und

$$\begin{aligned} n=0: \quad & x_0 = 0,\ \omega_0 = 1, \\ n=1: \quad & x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\ \omega_0 = \frac{1}{2}, \\ & x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}},\ \omega_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1-Punkt Quadratur:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx 1 \cdot \omega_0 \cdot f(\tilde{x}_0) = 1 \cdot f(\tfrac{1}{2}) = \frac{11}{8} = 1,375 \Rightarrow \text{nicht exakt!!}$$

2-Punkt Quadratur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx \approx & 1 \cdot (\omega_0 \cdot f(\tilde{x}_0) + \omega_1 \cdot f(\tilde{x}_1)) \\ = & \frac{1}{2} \cdot f(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{3}}) + \frac{1}{2} \cdot f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}) = \frac{1}{2} \cdot 3,5 = 1,75 \Rightarrow \text{exakt!!} \end{aligned}$$

Aufgabe 16: Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `TrapezIntegration(a,b,h)`, welche das Integral über eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

berechnet. Die Argumente `a,b` sind die Intervallgrenzen, `h` ist die Feinheit der Intervallzerlegung. Verwenden Sie bitte folgendes Programmgerüst:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion
% mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  ...
end

% Hauptprogramm:
...

end
```

Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [0,1]$. Erstellen Sie eine Konvergenztabelle für die Gitterfeinheiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$, d. h. berechnen Sie zu diesen Feinheiten den Fehler zwischen dem berechneten und dem exakten Wert des Integrals.

LÖSUNG:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion mit der Trapezregel.
```

```
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = x*x;
end

% Hauptprogramm:
% Die Berechnung des Integrals
value = 0;

% Die beiden Randwerte
value = value + evaluateF(a) / 2;
value = value + evaluateF(b) / 2;

% Anzahl der Teilintervalle
n = (b-a) / h;

% Iteriere ueber die Teilintervalle
for i=1:n-1
  value = value + evaluateF(a + i*h);
end

% anschliessend multipliziere alles mit h
value = value * h;
end
```

Der exakte Wert des Integrals ist $\frac{1}{3}$, damit sieht die Konvergenztabelle folgendermaßen aus:

Gitterweite h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Fehler	0.0016667	0.00041667	0.00010417	2.6042e-05	6.5104e-06

Man sieht, dass sich der Fehler viertelt, wenn die Gitterweiter halbiert wird.