Aufgabe 17: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie beide Lösungen in der Form $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $x^2 + (1-3i)x - 2 - 2i = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}i = 0$

Tipp: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

LÖSUNG: Verwende die p-q-Formel:

a)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-3i)^2}{4} + 2 + 2i} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{1-6i-9+8+8i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2i, \quad x_2 = -1 + i$

Dabei ist $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{2\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i} \\
&= -\sqrt{2} \pm \sqrt{4}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{3} + i\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + i, \quad x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{3} - i$

Um sich die Winkel zu überlegen, ist eine Skizze hilfreich.

Aufgabe 18: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i.$	ja ☐	nein ☐
b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$	ja ☐	nein ☐
c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{i}.$	ja ☐	nein ☐
d) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{i}.$	ja ☐	nein ☐
e) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i).$	ja ☐	nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja!

Begründung:
Die Eulersche Formel lautet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus ergibt sich:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i\,,$$

wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Wegen

$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i\,,$$

da $\cos(-x) = \cos x$ (cos ist gerade!) und $\sin(-x) = -\sin x$ (sin ist ungerade!), gilt also

a) Nein!

b) Ja!

Wegen $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm i^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{i}$.
Die Eulersche Formel besagt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,.$$

$\dfrac{\pi}{4}$ entspricht einem Winkel von 45°.
Behauptung: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Nachweis:

- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\Rightarrow\; \cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ (folgt aus Additionstheorem für sin!)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} > 0\,!
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

e) Ja!

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 &= \frac{2}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i+i^2) \\
&= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sqrt{i} &= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,, \\
-\sqrt{i} &= -\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Also:

c) Nein!

d) Ja!

Aufgabe 19: Beweisen Sie: Bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen immer als konjugierte Paare auf, d.h. falls $p(z) = 0$ dann auch $p(\overline{z}) = 0$.
Tipp: Beweisen Sie $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ und folgern Sie daraus die Behauptung. Was ist $\overline{r}$ für $r \in \mathbb{R}$?

LÖSUNG: Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein beliebiges Polynom mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Zuerst beweisen wir, $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$:

$$\begin{aligned}
p(\overline{z}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} \qquad \text{da } a_i = \overline{a_i} \text{ für } a_i \in \mathbb{R} \\
&= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} \\
&= \overline{p(z)}
\end{aligned}$$

Sei nun z eine Nullstelle des Polynoms $p(z)$, dann gilt $p(z) = 0$. Da $0 \in \mathbb{R}$ gilt $0 = \overline{0}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \overline{p(z)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad p(\overline{z}) &= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 20: Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -16.$$

Lösung:

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R},\, r \geq 0$$

$$\begin{aligned}
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i3\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(-1+i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i5\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(-1-i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i7\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1-i)
\end{aligned}$$

Aufgabe 21: Skizzieren Sie die Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1 \quad \text{für} \quad k = 2, 4, 8$$

in $\mathbb{C}$. Wie sehen alle Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

in $\mathbb{C}$ aus?

Lösung: Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ in $\mathbb{C}$:

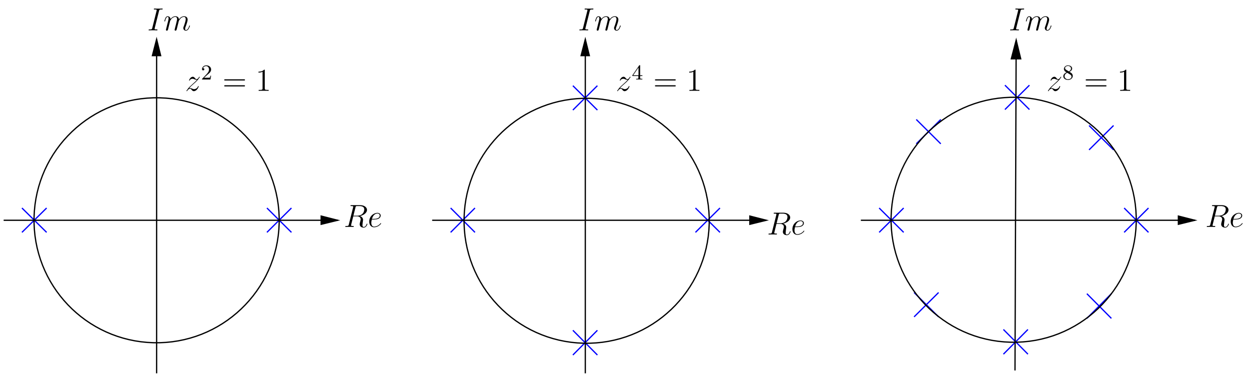
$$\begin{aligned}
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i0} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i2\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}$$

Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lllll}
z^4 = 1 & \Leftrightarrow & z^4 = e^{i0} & \Rightarrow & z = e^{i0} = 1 \\
z^4 = 1 & \Leftrightarrow & z^4 = e^{i2\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z^4 = 1 & \Leftrightarrow & z^4 = e^{i4\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\pi} = -1 \\
z^4 = 1 & \Leftrightarrow & z^4 = e^{i6\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i
\end{array}$$

Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lllll}
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i0} & \Rightarrow & z = e^{i0} = 1 \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i2\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i4\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i6\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i8\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\pi} = -1 \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i10\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i12\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i14\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{array}$$



Eine Lösungen der allgemeinen Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

ist immer $z = 1$. Die restlichen $k - 1$ Lösungen liegen gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis:

$$z = e^{2\pi i \frac{l}{k}} \text{ für } l = 0, 1, \ldots k - 1.$$

Die Lösungen von $z^{2k} = 1$ sind die k Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ und k weitere Lösungen.