Aufgabe 22: Wir suchen

$$\min\{Ax\cdot x \mid \|x\|=1\} \qquad \text{für} \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Die Menge $\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|=1\}$ läßt sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Finden Sie eine Funktion $\gamma:[0,T)\to\mathbb{R}^2$, die diese Kurve beschreibt.

b) Berechnen Sie $A\gamma(t)\cdot\gamma(t)$.

c) Zeichnen Sie die Funktion $a(t):=A\gamma(t)\cdot\gamma(t)$ auf $[0,T)$.

d) Bestimmen Sie die Minimalstellen der Funktion $a(t)$ auf $[0,T)$ und die zugehörigen Funktionswerte.

e) Bestimmen Sie damit $\min\{Ax\cdot x \mid \|x\|=1\}$ und einen Vektor, an dem dieses Minimum angenommen wird.

Aufgabe 23: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A=UDU^T$ gilt.

Aufgabe 24: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B=A-4\mathbb{1}$.

Aufgabe 25: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tipps: Das charakteristische Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten und ganzzahlige Nullstellen (d.h. die Eigenwerte von A sind ganzzahlig).
Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.