Aufgabe 22: Wir suchen

$$\min\{Ax \cdot x \mid \|x\| = 1\} \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ läßt sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Finden Sie eine Funktion $\gamma : [0,T) \to \mathbb{R}^2$, die diese Kurve beschreibt.

b) Berechnen Sie $A\gamma(t) \cdot \gamma(t)$.

c) Zeichnen Sie die Funktion $a(t) := A\gamma(t) \cdot \gamma(t)$ auf $[0,T)$.

d) Bestimmen Sie die Minimalstellen der Funktion $a(t)$ auf $[0,T)$ und die zugehörigen Funktionswerte.

e) Bestimmen Sie damit $\min\{Ax \cdot x \mid \|x\| = 1\}$ und einen Vektor, an dem dieses Minimum angenommen wird.

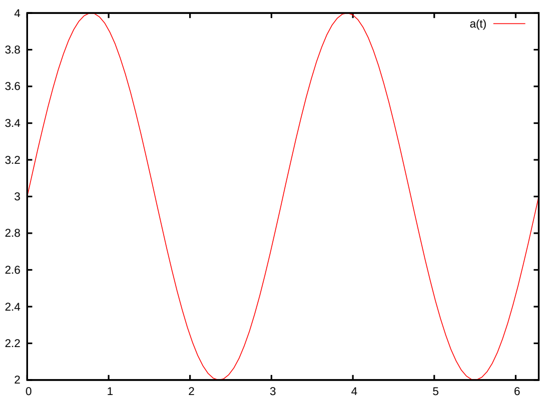
LÖSUNG:

a) $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{aligned}
A\gamma(t) \cdot \gamma(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= 3\cos^2 t + 2\cos t \sin t + 3\sin^2 t \\
&= 3(\cos^2 t + \sin^2 t) + 2\cos t \sin t \\
&= 3 + 2\cos t \sin t
\end{aligned}$$

c) Funktion $a(t)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$:



d)

$$a'(t) = -2\sin^2 t + 2\cos^2 t$$

$$\begin{aligned}
 & a'(t) &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow & -2\sin^2 t + 2\cos^2 t &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow & \cos^2 t &=& \; \sin^2 t \\
\Leftrightarrow & \cos t &=& \; \pm\sin t \\
\Leftrightarrow & t &=& \; \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi \text{ oder } \tfrac{7}{4}\pi
\end{aligned}$$

$$a''(t) = -4\sin t\cos t - 4\cos t\sin t = -8\sin t\cos t$$

$$\begin{aligned}
a''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -8\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4 \\
a''\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= -8\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \\
a''\left(\frac{5}{4}\pi\right) &= -8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 \\
a''\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= -8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 4
\end{aligned}$$

Die Minima der Funktion $a(t)$ liegen also bei $t = \frac{3}{4}\pi$ und $t = \frac{7}{4}\pi$.

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \\
a\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\min\{Ax\cdot x \mid \|x\| = 1\} &= \min\left\{A\gamma(t)\cdot\gamma(t) \,\middle|\, t\in[0,2\pi)\right\} \\
&= \min\left\{a(t) \,\middle|\, t\in[0,2\pi)\right\} = 2
\end{aligned}$$

Ein Vektor, an dem das Minimum angenommen wird ist also der Vektor

$$\gamma\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \gamma\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

LÖSUNG: **Berechnung des charakteristischen Polynoms:**

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{array}{rrcl} & P(\lambda) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (3-\lambda)^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & 3 \pm \sqrt{1} = 2 \text{ oder } 4 \end{array}$$

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & -y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 4\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T = U$$

$$\begin{aligned} U^T A U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B = A - 4\,\mathbb{1}$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 3 + 3\lambda \\ &= 3 - 7\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda \\ &= -4\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_1(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda\,(\lambda^2 - 5\lambda + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda\left[\left(\lambda - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &= 0 \text{ oder } \tfrac{5}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4}} \text{ oder } \tfrac{5}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &= 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$.
Nun berechnen wir die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-3-\lambda)^2(-1-\lambda) + 1 + 1 - (-3-\lambda) - (-3-\lambda) - (-1-\lambda) \\ &= \left(9 + 6\lambda + \lambda^2\right)(-1-\lambda) + 9 + 3\lambda \\ &= -9 - 6\lambda - \lambda^2 - 9\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 9 + 3\lambda \\ &= -12\lambda - 7\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_2(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda\,(\lambda^2 + 7\lambda + 12) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{48}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &= 0 \text{ oder } -\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}} \text{ oder } -\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &= 0 \text{ oder } -4 \text{ oder } -3 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$ sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -3$.
Die Eigenwerte der Matrix $A - 4\mathbb{1}$ erhält man also, indem man die Eigenwerte der Matrix A nimmt und jeweils 4 subtrahiert.

Aufgabe 25: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

> **Tipps:** Das charakteristische Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten und ganzzahlige Nullstellen (d.h. die Eigenwerte von A sind ganzzahlig).
> Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.

LÖSUNG: **Berechnung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13-9\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-9\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-9\lambda \end{pmatrix} \\ &= 9^{-3}((13-9\lambda)^2(10-9\lambda)+16+16-4(13-9\lambda)-4(13-9\lambda)-16(10-9\lambda)) \\ &= 9^{-3}((169-234\lambda+81\lambda^2)(10-9\lambda)+32-104+72\lambda-160+144\lambda) \\ &= 9^{-3}(1690-2340\lambda+810\lambda^2-1521\lambda+2106\lambda^2-729\lambda^3-232+216\lambda) \\ &= 2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3 \end{aligned}$$

Aus dem Tipp wissen wir, dass die Matrix A ganzzahlige Eigenwerte hat. Folglich raten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und testen

$$P(1) = 2-5+4-1 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$(2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3) : (\lambda-1) = -\lambda^2+3\lambda-2$$

$$\begin{aligned} & -\lambda^2+3\lambda-2 &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2-3\lambda+2 &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &=& \ \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ & &=& \ 1 \text{ oder } 2 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Eigenvektoren:

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & (A - 2\mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (9A - 18\mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} -\frac{1}{5}I = I' \\ \frac{4}{5}I + II = II' \\ -\frac{2}{5}I + III = III' \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{9}II' \\ -2II' + III' \end{array} \\
\Rightarrow & x_2 & = & -2x_3 \\
 & x_1 & = & \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 \\
 & & = & -\frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 \\
 & & = & -2x_3
\end{array}
$$

Mit $x_3 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & (A - \mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (9A - 9\mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Alle Zeilen sind äquivalent

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also die Ebene durch den Ursprung, die durch diese Gleichung gegeben ist. Man kann sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir suchen nun als Eigenvektoren zwei zueinander senkrechte (und normierte) Richtungsvektoren in dieser Ebene.

Wir wählen als ersten z.B. den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (man kann natürlich einen beliebigen

Nicht-Null-Vektor in der Ebene wählen, dieser hat aber eine besonders rechenfreundliche Länge) und normieren ihn, so dass wir den Vektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

erhalten. Als zweiten Eigenvektor suchen wir einen Vektor aus demselben Eigenraum, der senkrecht auf v_1 steht, das heißt folgende zwei Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor senkrecht auf v_1 steht und die zweite Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor im selben Eigenraum liegt. Addition beider Gleichungen ergibt

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt erhält man

$$x_1 = -2x_2.$$

Mit $x_2 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren v_1, v_2 und v_3 senkrecht auf einander stehen ($v_1 \cdot v_3 = 0$ und $v_2 \cdot v_3 = 0$) und normiert sind, ist die Matrix

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix.

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Wir wählen im ersten Schritt den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und erhalten so

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$