Aufgabe 26: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, d.h. berechnen Sie eine orthogonal Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^T$. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D.

Aufgabe 27: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

durch 2×2 Determinanten aus.
Tipp:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um das Charakteristische Polynom von A als Produkt zweier quadratischer Polynome zu schreiben.

c) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Tipp: Sie kennen die 2×2 Blöcke bereits aus anderen Übungen bzw. Beispielen.

Aufgabe 28: Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

Aufgabe 29: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1\right\}$$

gegebenen Ellipsoids.