Aufgabe 26: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, d.h. berechnen Sie eine orthogonal Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^T$. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D.

LÖSUNG: Da A eine symmetrische Matrix ist, hat die zu A gehörende Diagonalmatrix auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Da A drei voneinander verschiedene Eigenwerte hat, sind die Eigenräume orthogonal und wir erhalten

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = UDU^T.$$

Des Weiteren gilt für die Determinant und Spur von A und D:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1 + 2 + 4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Aufgabe 27: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

durch 2×2 Determinanten aus.
Tipp:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um das Charakteristische Polynom von A als Produkt zweier quadratischer Polynome zu schreiben.

c) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Tipp: Sie kennen die 2×2 Blöcke bereits aus anderen Übungen bzw. Beispielen.

LÖSUNG:

a)

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & f\\ 0 & 0 & g & h\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & f\\ 0 & 0 & g & h\end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{4+4}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & g & h\end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A-\lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 6\\ 6 & 7-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (-\lambda(3-\lambda)-4)\left((-2-\lambda)(7-\lambda)-36\right)\\ &= \left(\lambda^2-3\lambda-4\right)\left(\lambda^2-5\lambda-50\right)\end{aligned}$$

c) Die Eigenwerte der Matrix A setzen sich zusammen aus den Eigenwerten der Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ und den Eigenwerten der Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6\\ 6 & 7\end{pmatrix}$ $\lambda_3 = -5$ und $\lambda_4 = 10$. Füllen wir die Eigenvektoren der beiden 2×2 Matrizen passend mit Nullen auf, so erhalten wir die Eigenvektoren der Matrix A, denn

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & f\\ 0 & 0 & g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

für λ Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}$ zugehörigem Eigenvektor.

Da $\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist, ist $v_1 = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1.

Da $\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist, ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_2.

Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist, ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_3.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist, ist $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_4.

<u>Alternativ lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren auch wie folgt berechnen:</u>

$$\begin{array}{rrclcrcl} P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow & (\lambda^2 - 3\lambda - 4) & = & 0 & \text{oder} & (\lambda^2 - 5\lambda - 50) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} & \text{oder} & \lambda & = & \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} \end{array}$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -5, \quad \lambda_4 = 10$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A + 1\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 & = & 0 \\ & -x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3 + 8x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = -2x_2$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = x_4 = 0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned}
(A - 4\mathbb{1})x &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\
2x_1 - x_2 &= 0 \\
-6x_3 + 6x_4 &= 0 \\
6x_3 + 3x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_2 = 2x_1$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = x_4 = 0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist also der Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$:

$$\begin{aligned}
(A + 5\mathbb{1})x &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad 5x_1 + 2x_2 &= 0 \\
2x_1 + 8x_2 &= 0 \\
3x_3 + 6x_4 &= 0 \\
6x_3 + 12x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = -2x_4$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist also der Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$:

$$\begin{aligned}
(A - 10\mathbb{1})x &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -10x_1 + 2x_2 &= 0 \\
2x_1 - 7x_2 &= 0 \\
-12x_3 + 6x_4 &= 0 \\
6x_3 - 3x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_4 = 2x_3$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist also der Vektor

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

LÖSUNG: Die Gleichung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ist äquivalent zu der Gleichung

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1,$$

wobei $\mathbf{A}$ folgende symmetrische 3×3-Matrix sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}$ den Vektor $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet. Es gilt nämlich

$$\mathbf{Ax} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6x + 2y - 2z \\ 2x + 7y \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$$

und

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{3}[6x^2 + 2xy - 2xz + 2xy + 7y^2 - 2xz + 5z^2] = 2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz,$$

woraus obige Behauptung folgt. Um die Hauptachsen dieser Fläche zu bestimmen führen wir eine Hauptachsentransformation durch. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)(\frac{7}{3} - \lambda)(\frac{5}{3} - \lambda) - \frac{4}{9}(\frac{7}{3} - \lambda) - (\frac{5}{3} - \lambda)\frac{4}{9} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{35}{9}) - \frac{28}{27} + \frac{4}{9}\lambda - \frac{20}{27} + \frac{4}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \frac{35}{9}\lambda + 2\lambda^2 - 8\lambda + \frac{70}{9} - \frac{48}{27} + \frac{8}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-\frac{35}{9} + \frac{8}{9} - 8)\lambda + \frac{54}{9} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Durch Probieren erhält man, dass $\lambda = 1$ eine Lösung der Gleichung $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, da $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas erhält man dann

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

D. h. die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren: Für $\lambda_1 = 1$ erhält man:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +4y & & = 0 \\ -2x & & +2z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = z \quad \Leftrightarrow \quad z = x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Für $\lambda_2 = 2$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +y & & = 0 \\ -2x & & -z & = 0 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow y = z \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

und aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die dritte Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
Für $\lambda_3 = 3$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} & = & \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} -3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 0 \\ -2x & & -4z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = y \quad \Leftrightarrow \quad y = x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = -2z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2}x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$.
Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \frac{1}{9}(-2 - 2 + 4) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-2 + 4 - 2) = 0. \end{aligned}$$

D. h. die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und die Matrix

$$\mathbf{V} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, d. h. es gilt $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ mit

$$\mathbf{V}^T := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$$

wie man leicht nachrechnet. Es folgt

$$\mathbf{AV} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T\mathbf{AV} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{VDV}^T \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\mathbf{y} := \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{DV}^T\mathbf{x}, \mathbf{V}^T\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{VDV}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1.$$

Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ alle positiv sind, ist die durch

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1$$

definierte Fläche ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 29: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+5y^2+2z^2-4yz=1\right\}$$

gegebenen Ellipsoids.

LÖSUNG:

$$x^2+5y^2+2z^2-4yz=1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=1\,,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Berechne Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren:

$$0=\det(A-\lambda\mathbb{1})=(1-\lambda)\cdot\big((5-\lambda)(2-\lambda)-4\big)=(1-\lambda)\cdot\big(\lambda^2-7\lambda+6\big)=(1-\lambda)^2(6-\lambda)$$
$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=6$$

Die Halbachsenlängen sind gegeben durch $1/\sqrt{\lambda_i}$, d.h. $a=1$, $b=1$ und $c=1/\sqrt{6}$.

Normierte Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}=1$ bzw. die Achsen der Länge a und b:

$$\ker\left(A-1\mathbb{1}\right)=\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\rangle$$

Normierter Eigenvektor zu $\lambda_3=6$ bzw. die Achse der Länge c::

$$\ker\left(A-6\mathbb{1}\right)=\ker\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$