Aufgabe 30: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden. Wir betrachten dazu eine Zahlenfolge ähnlich den Fibonacci-Zahlen.

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \quad = \quad & x_n + 2x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$.
Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt zu berechnen berechnen, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

Aufgabe 31: Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 32: Thema: Positiv definite Matrizen

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $\det A > 0$, dann ist A positiv definit. ja ☐ nein ☐

b) Ist A positiv definit, dann gilt $\det A > 0$. ja ☐ nein ☐

c) Hat das homogene System $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann ist A nicht positiv definit. ja ☐ nein ☐

d) Ist A positiv definit, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 33: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von $A^T A$. ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 34: Thema: Singulärwertzerlegung und assoziierte Unterräume

Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r und $A = UDV^T$ ihre Singulärwertzerlegung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Der Spaltenraum von A wird von den ersten r Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

b) Jeder Vektor y im Kern von A^T steht senkrecht auf jeder Spalte von A. ja ☐ nein ☐

c) Der Kern von A^T wird von den letzten $n - r$ Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

d) Der Spaltenraum von A^T wird von den ersten r Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐

e) Der Kern von A wird von den letzten $m - r$ Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐