Aufgabe 30: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden. Wir betrachten dazu eine Zahlenfolge ähnlich den Fibonacci-Zahlen.

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \quad = & \quad x_n + 2x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots$.
Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt zu berechnen berechnen, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

LÖSUNG:

a) Die Eigenwerte lauten 2 und -1.

b) Beweis durch nachrechnen.

c) Für die inverse Matrix einer 2×2 Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1}$$

mit $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

d)

$$A^2 = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} B^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1^n & -\lambda_1^n \lambda_2 \\ -\lambda_2^n & \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix}}$$

e)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y_{n+1} = A^n y_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad x_n &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \end{aligned}$$

Probe: $\quad x_0 = \frac{1-1}{3} = 0, \quad x_1 = \frac{2+1}{3} = 1 \quad x_2 = \frac{4-1}{3} = 1, \quad x_3 = \frac{8+1}{3} = 3, \ldots$

Aufgabe 31: Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

$$A^T A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte der Matrix $A^T A$:

$$P(\lambda) = \det\left(A^T A - \lambda \mathbb{1}\right) = \det \begin{pmatrix} 45 - \lambda & 27 \\ 27 & 45 - \lambda \end{pmatrix} = (45 - \lambda)^2 - 27^2$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 45 \pm 27 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 18 \text{ oder } \lambda = 72$$

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren der Matrix A^TA:

$$\left(A^TA - 18\mathbb{1}\right)x = \begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 27(x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix A^TA zum Eigenwert 18.

$$\left(A^TA - 72\mathbb{1}\right)x = \begin{pmatrix} -27 & 27 \\ 27 & -27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -27x_1 + 27x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix A^TA zum Eigenwert 72.

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = AV = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & \frac{4}{\sqrt{144}} & ? \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & ? \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte der Matrix U berechnen wir, indem wir einen Vektor suchen, der senkrecht auf den ersten beiden Spalten von W steht und zudem Norm eins hat.

$$\begin{array}{rrcll}
 & \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
 & -\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -2u_1 + u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -3u_2 - 6u_3 & = & 0 & 2I + II \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2u_2 - 2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2(-2u_3) + 2u_3 = -2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 &
\end{array}$$

Wir wählen z.B. $u_3 = 1$ und berechnen dann $u_1 = u_2 = -2$, anschließend normieren wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = UDV^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 32: Thema: Positiv definite Matrizen

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $\det A > 0$, dann ist A positiv definit. ja ☐ nein ☐

b) Ist A positiv definit, dann gilt $\det A > 0$. ja ☐ nein ☐

c) Hat das homogene System $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann ist A nicht positiv definit. ja ☐ nein ☐

d) Ist A positiv definit, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Nein! Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Ja! Da die Matrix A positiv definit ist, sind alle ihre Eigenwerte größer Null. Da die Determinante von A sich schreiben läßt als das Produkt der Eigenwerte von A ist auch die Determinante größer Null.

c) Ja! Wenn das homogene System $Ax = 0$ eine nicht triviale Lösung hat, sind die Spalten von A linear abhängig. Daraus folgt, dass die Determinante von A gleich Null ist und somit muss mindestens ein Eigenwert von A gleich Null sein, so dass die Matrix nicht positiv definit sein kann.

d) Ja! Wenn die Matrix A positiv definit ist, gilt $\det A \neq 0$. Daraus folgt A ist invertierbar und somit ist das Gleichungssystem eindeutlich lösbar.

Aufgabe 33: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A^TA. ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! A orthogonal $\Rightarrow AA^T = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte von AA^T sind gleich 1 $\Rightarrow$ die Singulärwerte von A sind gleich $\sqrt{1} = 1$

b) Nein! Die Matrix $A = -\mathbb{1}$ ist orthogonal und ihre Eigenwerte sind -1. Da in diesem Fall $A^T A = \mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A jedoch gleich 1.

c) Ja! Die Singulärwerte von A ergeben sich aus den Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A = \mathbb{1}$ und $\sqrt{1} = 1$.

d) Nein! Betrachten Sie die Matrix $A = 2\mathbb{1}$. Da in diesem Fall $A^T A = 4\mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A gleich 2.

e) Nein! A symmetrisch $\Rightarrow A = A^T$

$$\Rightarrow AA^T = A^2 = UD^2U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^T$$

$\Rightarrow$ Für die Singulärwerte σ_i von A gilt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$ (siehe auch b))

f) Ja! Begründung siehe oben.

Aufgabe 34: Thema: Singulärwertzerlegung und assoziierte Unterräume

Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r und $A = UDV^T$ ihre Singulärwertzerlegung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Der Spaltenraum von A wird von den ersten r Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

b) Jeder Vektor y im Kern von A^T steht senkrecht auf jeder Spalte von A. ja ☐ nein ☐

c) Der Kern von A^T wird von den letzten $n - r$ Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

d) Der Spaltenraum von A^T wird von den ersten r Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐

e) Der Kern von A wird von den letzten $m - r$ Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Ja!

b) Ja!

c) Nein! Der Kern von A^T wird von den letzten $m - r$ Spalten von U aufgespannt.

d) Ja!

e) Nein! Der Kern von A wird von den letzten $n - r$ Spalten von V aufgespannt.