Aufgabe 35: Geben Sie eine Lipschitzkonstante für die Funktion

$$f(t, y) = t^2 + y^2 \quad \text{bzgl. } y$$

im Gebiet $-2 < t < 2$, $0 < y < 5$ an.

LÖSUNG: 1. Möglichkeit: Die Funktion f ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y\;, \quad \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2\,|y| < 10\;.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung lassen sich alle Differenzenquotienten von f bzgl. y abschätzen. Damit folgt, daß $L = 10$ Lipschitzkonstante für f im gegebenen Gebiet ist. (Siehe auch Vorlesung: lokale Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
2. Möglichkeit: Es gilt

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2| < 10\,|y_1 - y_2|,$$

da $y_1, y_2 \in (0, 5)$.

Aufgabe 36: Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}$$

a) Überprüfen Sie, dass mit $y(x)$ auch $\tilde{y}(x) = -y(-x)$ Lösung der Gleichung ist.

b) Überprüfen Sie, dass: $y_C(x) = \dfrac{(x+C)^2}{4}$ für $x > -C$ positive Lösung ist.

Gibt es mehr Lösungen?

c) Überprüfen Sie, dass für $a < 0 < b$

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-b)^2}{4}, & \text{für } x > b \\ 0, & \text{für } a \leq x \leq b \\ -\dfrac{(x-a)^2}{4}, & \text{für } x < a \end{cases}$$

Lösung der Differentialgleichungen zu den Anfangsdaten $y(0) = 0$ ist.

Warum steht das nicht im Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung?

LÖSUNG:

a)
$$\tilde{y}' = -\left(y(-x)\right)' = -(-y'(-x)) = y'(-x) = \sqrt{|y'(-x)|} = \sqrt{|-y'(-x)|} = \sqrt{|\tilde{y}|}$$

b)
$$y_C' = \left(\frac{(x+C)^2}{4}\right)' = \frac{x+C}{2} = \sqrt{\frac{(x+C)^2}{4}} = \sqrt{|y_C|}$$

Ya, $y = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{y}_C(x) = -\dfrac{(C-x)^2}{4}$ für $x < C$ sind Lösungen.

c) Für $x \neq a$ und $x \neq b$, siehe Teil b).
Die Funktion $y_{a,b}(x)$ ist stetig und differenzierbar an $x = a$:
$$\lim_{x\to a} -\frac{(x-a)^2}{4} = 0 \text{ und } \lim_{x\to a} -\frac{x-a}{2} = 0$$
Gleichfalls für $x = b$:
$$\lim_{x\to b} \frac{(x-b)^2}{4} = 0 \text{ und } \lim_{x\to b} \frac{x-b}{2} = 0$$
An der Stelle $x = 0$, $y_{a,b}(0) = 0$. Weil die Funktion $\sqrt{|y|}$ nicht Lipschitz-stetig in einer Umgebung von $y = 0$ ist, die Bedingugen aus dem Satz von Picard-Lindelöf sind nicht erfüllt.

Aufgabe 37: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung
$$\ddot{y} = y\,,$$

a) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$,

b) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$,

indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

LÖSUNG:
Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir
$$z_0 := y,\ z_1 := \dot{y} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z}_1 = \ddot{y} = y = z_0 \end{array}$$
Also ist
$$\dot{z} = \dot{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}z$$
zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch
$$z(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} z(t_0)$$
gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und in (a) $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in (b) $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dadurch ergeben sich die Lösungen

- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie sieht $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus?
Um diese Frage beantworten zu können, diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{A}$ und starten mit der Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & -1 \quad \text{oder} \quad 1 \end{array}$$

Anschließend berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} + 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & -x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert -1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} - 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert 1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{t} & -e^{-t} + e^{t} \\ -e^{-t} + e^{t} & e^{-t} + e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^4 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \\
\mathbf{A}^5 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Induktiv:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^0 &= \mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \ldots = \mathbf{A}^{2k} = \mathbf{A}^{2k+2} \\
\mathbf{A}^1 &= \mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \ldots = \mathbf{A}^{2k+1} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \; e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \right) \mathbf{I} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\mathbf{I} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\mathbf{A} \\
&= \cosh t\mathbf{I} + \sinh t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \sinh t$
- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \cosh t$

Aufgabe 38: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = 2y + \dot{y}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$, indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

LÖSUNG:
Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir

$$z_0 := y,\; z_1 := \dot{y} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \dot{z}_0 = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z}_1 = \ddot{y} = 2y + \dot{y} = 2z_0 + z_1 \end{array}$$

Also ist

$$\dot{z} = \dot{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}z$$

zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch

$$z(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} z(t_0)$$

gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dadurch ergibt sich die Lösung $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zur Berechnung von $e^{t\mathbf{A}}$ diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
& \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}\right) &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow \; & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow \; & \lambda^2 - \lambda - 2 &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow \; & \lambda &=& \; 2 \quad \text{oder} \quad -1
\end{aligned}$$

Zum Eigenwert 2 ergibt sich ein Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, Zum Eigenwert -1 ergibt sich ein Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} z(0) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ -3e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also $y(t) = e^{-t}$.