Aufgabe 39: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 + y^2, \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

LÖSUNG: Wir lösen das Anfangswertproblem durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \int_a^{y(t)} \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_0^t 1\, ds \\ \Leftrightarrow \qquad & \arctan(y(t)) - \arctan(a) = t \\ \Leftrightarrow \qquad & y(t) = \tan(t + \arctan(a)) \end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Für welche t ist diese Lösung nun definiert?
arctan ist als Umkehrfunktion von tan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ab, denn tan ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend daher umkehrbar.
Wenn nun

$$c_0 = \arctan(a) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \,,$$

dann ist $y(t) = \tan(t + c_0)$ definiert für

$$-c_0 - \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} - c_0 \,.$$

Denn für $t \to \frac{\pi}{2} - c_0$ (von unten) bzw. $t \to -\frac{\pi}{2} - c_0$ (von oben) gilt:

$$\tan(t + c_0) \to \pm\infty$$

Aufgabe 40: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -y\sin(t) + \sin(2t); \quad y(0) = 1.$$

LÖSUNG: 1) Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y\,\sin(t)$$

durch Separation der Variablen, bzw. direkt (siehe Skript)

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -\sin(t) \quad \Rightarrow \int \frac{\dot{y}}{y}\, dy = -\int \sin(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \cos(t) + c \quad \Rightarrow y(t) = c_h\, e^{\cos(t)} =: y_h(t)\,.$$

2) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gewinnen wir durch die Methode der Variation der Konstanten. Dazu gehen wir aus von dem Ansatz:

$$y_s(t) := c(t)\, y_h(t) \;,$$

berechnen die Ableitung von $y_s(t)$ und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, y_h(t) + \dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\, \sin(t) + \sin(2\,t) \;.$$

Es gilt

$$\dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\, \sin(t) \;.$$

da y_h die homogene Differentialgleichung löst. Also folgt, daß

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, c_h e^{\cos(t)} = \sin(2\,t) \;.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c(t) &= \int_0^t \frac{1}{c_h} e^{-\cos(u)}\, \sin(2\,u)\, du \\
&= \frac{2}{c_h} \int_0^t e^{-\cos(u)}\, \cos(u)\, \sin(u)\, du \qquad (\text{Subst. } s = -\cos(u)) \\
&= -\frac{2}{c_h} \int_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} e^s\, s\, ds \qquad (\text{Subst. gibt } \; ds = \sin(u)\, du) \\
&= -\frac{2}{c_h}\, e^s\, (s-1) \Big|_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} = \frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e} \;.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_s(t) &= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e} \right) y_h \\
&= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e} \right) c_h e^{\cos(t)} \\
&= 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + c_h\, e^{\cos(t)} \;.$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung ergibt:

$$y(0) = 2(1+1) - 4e^{1-1} + c_h e \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_h\, e = 1 \quad \Rightarrow c_h = \frac{1}{e} \;.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems schließlich:

$$y(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + e^{\cos(t)-1} \;.$$

Alternativ: Man kann eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \;\text{ mit } y(t_0) = y_0$$

auch mit den folgenden Formeln lösen:

$$y_h(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$
$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y_h(s)}\, ds + y_0$$
$$y(t) = c(t) y_h(t)$$

Aufgabe 41: Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = 5y(t) + 3$ mit $y(0) = 2$ an.

LÖSUNG: Die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = 5y(t) + 3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$$

läßt sich auch schreiben als

$$\dot{y}(t) = f(t)g(y) \qquad \text{mit } f(t) = 1,\ g(y) = 5y + 3 \quad \text{und } y(0) = 2.$$

Daraus ergibt sich mit Separation der Variablen

$$\begin{array}{rrcl} & \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} & = & \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\, d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow & \int_{y_0}^{y} \frac{1}{5\tilde{y}+3} d\tilde{y} & = & \int_{t_0}^{t} 1\, d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{5}\left(\ln(5y+3) - \ln(13)\right) & = & t - t_0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{5} \ln \frac{5y+3}{13} & = & t \\ \Leftrightarrow & y(t) & = & \frac{13}{5} e^{5t} - \frac{3}{5} \end{array}$$

Aufgabe 42: Man löse die Differentialgleichung

a) $\dot{x} = \frac{1}{\sin(x)}$, $x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$

LÖSUNG: Durch Separation der Variablen erhält man

a)
$$x(t) = \arccos\left(\cos(x_0) - t\right)$$

b)
$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$