Aufgabe 43: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

Aufgabe 44: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right)\, du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 45: Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Aufgabe 46: Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.