Aufgabe 43: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

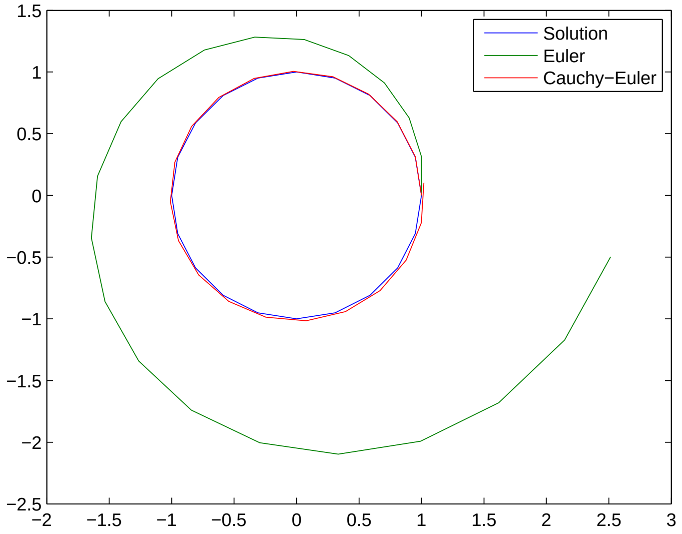
b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

LÖSUNG:

```
% compare Euler and Cauchy-Euler ODE solvers
function ode_compare

% initial value
x0 = [1 0];
% end time
T = 2*pi;
% time intervals
N = 20;

% right hand side of ODE
function x_prime = f ( t, x )
x_prime (1) = -x (2);
x_prime (2) =  x (1);
end

% compute one explicit Euler step
function x_new = eulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime = f ( t, x_old );
x_new = x_old + tau * x_prime;
end

% compute one explicit Cauchy-Euler step
function x_new = cauchyeulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime_old = f ( t, x_old );
x_mid = x_old + 0.5 * tau * x_prime_old;
```

```
x_prime_mid = f ( t + 0.5 * tau, x_mid );
x_new = x_old + tau * x_prime_mid;
end

% compute timestep size
tau = T / N;
% initialize
xe (1, :) = x0; % Euler solution
xc (1, :) = x0; % Cauchy-Euler solution

% compute time steps with both methods
for i = 1 : N
    xe (i+1, :) = eulerstep (xe (i, :), (i-1) * tau, tau);
    xc (i+1, :) = cauchyeulerstep (xc (i, :), (i-1) * tau, tau);
end

% compute correct solution
ts = 0 : tau : T;
xs (:, 1) = cos (ts);
xs (:, 2) = sin (ts);

% plot results
plot (xs (:, 1), xs (:, 2), xe (:, 1), xe (:, 2), xc (:, 1), xc (:, 2));
legend ('Solution', 'Euler', 'Cauchy-Euler');

% error
euler_error = norm (xs (N, :) - xe (N, :))
cauchy_euler_error = norm (xs (N, :) - xc (N, :))
end
```



Für den Fehler gilt

	$\tau = \frac{2\pi}{20}$	$\tau = \frac{2\pi}{40}$	$\tau = \frac{2\pi}{80}$
Euler	1.4741	0.6118	0.2753
Cauchy-Euler	0.0990	0.0252	0.0064

Aufgabe 44: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right)\, du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Lösung:

a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{k}\, f(t)\ \sin\left(k(t-t)\right) + \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right) k\, du \\ &= \int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right) du\ . \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sin 0 = 0$ benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t)\ \cos\left(k(t-t)\right) - k \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right) du \\ &= f(t) - k^2 x(t)\ , \end{aligned}$$

wobei wir $\cos 0 = 1$ beachtet haben.

b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$ ist.

Die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von $x(t)$ als Integral bzw. der berechneten Formel für $\dot{x}(t)$ als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t)\ dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion $g = g(t)$).

Aufgabe 45: Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(0,1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

LÖSUNG:

a) Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks D berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 1 - x\, dx \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} - 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders T berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1\, dy\, dx\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y\Big|_0^{1-x-z} dx\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1 - x - z\, dx\, dz \\
&= \int_0^1 x - \frac{1}{2}x^2 - zx\Big|_0^{1-z} dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}z^2\, dz \\
&= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

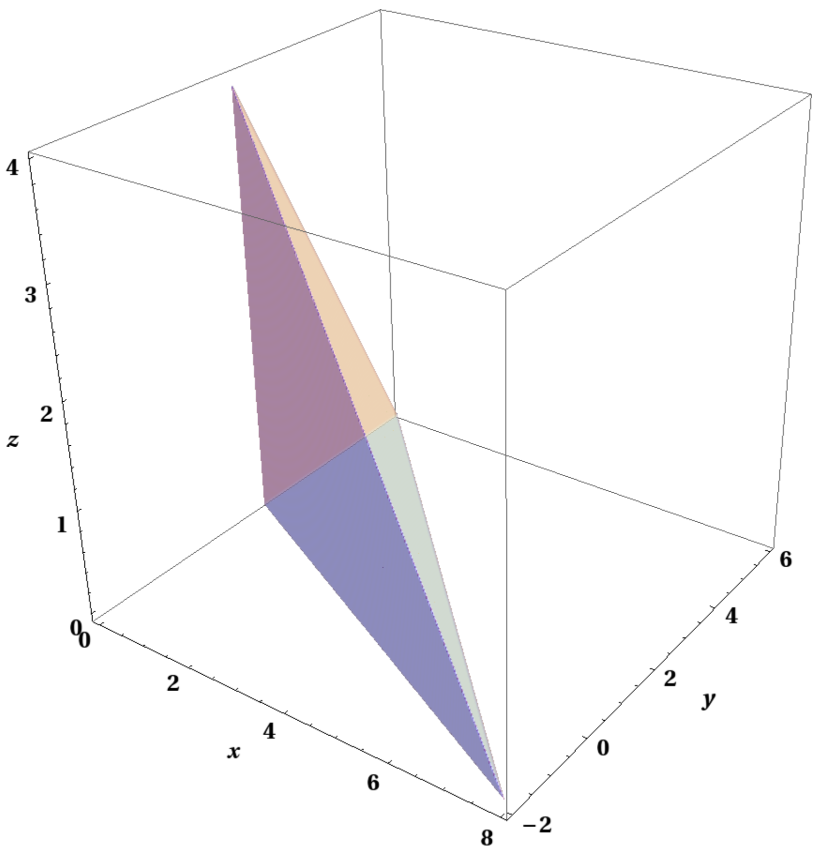
Aufgabe 46: Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.

Lösung:
Bei den drei Flächen handelt es sich um folgende Ebenen:

- $x + y + z = 6$ ist eine Ebene, die durch die Punkte $(6,0,0)^T$, $(0,6,0)^T$ und $(0,0,6)^T$ aufgespannt wird.
- $z = 0$ ist die x,y-Ebene.
- $x = 0$ ist die y,z-Ebene.
- $x + 2y = 4$ ist eine zur x,y-Ebene senkrechte Ebene, die durch die Punkte $(0,2,0)^T$ und $(4,0,0)^T$ läuft.



Wir betrachten die Projektion des Körpers in die x,y-Ebene. Der Körper wird bezüglich der z-Achse von zwei Flächen begrenzt: Der x, y-Ebene und der Ebene $x + y + z = 6$. Wenn wir zuerst über z integrieren ergeben sich daher folgende Grenzen für z.

$$0 \leq z \leq 6 - x - y.$$

Bezüglich der x-Achse wird der Körper von drei Ebenen begrenzt und bezüglich der y-Achse von zwei Ebenen. Daher ist es einfacher als nächstes über y zu integrieren. Die begrenzenden Flächen sind die Ebenen $x + y + z = 6$ und $x + 2y = 4$, wobei die zweite Ebene die untere Grenze festlegt.

$$x + 2y = 4 \iff y = 2 - \frac{x}{2} \quad \ldots \text{ untere Grenze}$$

$$x + y + z = 6 \iff y = 6 - x - z$$
$$\implies 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 6 - x, \text{ da maximales } y \text{ bei } z = 0$$

Nun fehlen noch die Grenzen für x. Die untere Grenze für x ist die y,z-Ebene und die obere Grenze ist der Schnittpunkt der Ebenen $x + y + z = 6$, $x + 2y = 4$ und $z = 0$.

$$0 \leq x \leq 8$$

Nun können wir das Volumen des Körpers berechnen.

$$\begin{aligned}
Vol_3(K) &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \int_0^{6-x-y} 1 \; dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} 6 - x - y \; dy\, dx \\
&= \int_0^8 \left[6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \; dx \\
&= \int_0^8 8 - 2x + \frac{x^2}{8} \; dx \\
&= \left[8x - x^2 + \frac{x^3}{24} \right]_0^8 \; dx \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$