Aufgabe 47: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

a) Sei
$$z = a + ib \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Wie ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ definiert?

b) Sei
$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r, \varphi \in \mathbb{R}.$$
Geben Sie $\overline{z}$ und $z\overline{z}$ in dieser Form an.

c) Sei
$$z = a + ib \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Geben Sie $\frac{1}{z}$ in dieser Form an.

d) Zeichnen Sie die Menge
$$\{e^{i\varphi} \,|\, \varphi \in \mathbb{R}\}$$
in der komplexen Ebene.

Aufgabe 48: Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung
$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$$
mit $M, R, D \in \mathbb{R}^+$.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

b) Geben Sie einen (konkreten) Satz von Anfangswerten vor, so dass das zugehörige Anfangswertproblem genau eine Lösung hat.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\dot{x} = tx + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \qquad x(0) = 1\,.$$

Aufgabe 49: Zeigen Sie, dass die Menge
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}yz + 4z^2 = 1\right\}$$
ein Ellipsoid ist, indem Sie (mittels Hauptachsentransformation) Richtung und Länge der Halbachsen angeben.

Aufgabe 50: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1: