



Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich



Übungsblatt 2.

Abgabe am **23.04.** vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. (Urnenmodell)

In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehung k rote Kugeln enthält, gegeben ist durch

$$\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

(2 + 2 = 4 Punkte)

Aufgabe 2. (Geburtstagsparadoxon I)

In einer Vorlesung befinden sich n Studenten.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n , dass mindestens zwei Studenten am selben Tag Geburtstag haben? Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Student am 29.02. geboren wurde und alle anderen Geburtstage gleichwahrscheinlich sind.
- Zeigen Sie unter Verwendung der Ungleichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass die untere Schranke

$$p_n \geq 1 - \exp(-n(n-1)/730)$$

gilt.

- Geben Sie ein n an, so dass $p_n > 0.5$ ist!

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 3. (σ -Algebra)

- Geben Sie alle auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ möglichen σ -Algebren an.
- Finden Sie die kleinste σ -Algebra auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, die das System $\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ enthält.
- Auf $\Omega = \mathbb{R}$ sei das Teilmengensystem $\mathcal{G} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Bestimmen Sie die kleinste σ -Algebra \mathcal{A} , die die Mengen aus \mathcal{G} enthält.

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 4. (Kolmogorov-Axiome)

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Zeigen Sie die untere Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes P , d.h.: Sind $A_j \in \mathcal{A}$ Ereignisse mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, dann folgt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k).$$

- b. Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ und es gelte $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 1/3$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

gelten muss.

(2 + 2 = 4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Geburtstagsparadoxon II)

- Installieren Sie “Anaconda” und machen Sie sich mit “Jupyter Notebook” vertraut (siehe Alma2-Webseite). Auf der Webseite gibt es außerdem ein Beispielnotebook.
- Laden Sie sich anschließend das Jupyter Notebook mit der Aufgabenstellung zur ersten Programmieraufgabe herunter (Link neben Blatt 2).
- Bearbeiten Sie die Teilaufgaben a), b) und c), indem Sie Python-Code an die entsprechenden Stellen einfügen.

(4 + 3 + 3 = 10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 23.04 bepunktet.