Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 1

Ausgabe: 19.04.2018
Abgabe: 26.04.2018

In der kommenden Woche werden die Aufgaben 5–8 in der Übungsstunde gemeinschaftlich erarbeitet. Wie üblich abgeben müssen Sie die Aufgaben 1–4.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge mit $\operatorname{int}(X) \neq \emptyset$. Geben Sie ein Beispiel an mit $\partial X \neq \partial(\operatorname{cl}(X))$, wenn X nicht konvex ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle $\lambda_i \geq 0, x_i \in X$, $i = 1, \ldots, m$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ stets

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i). \tag{1.1}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte). Geben Sie eine konvexe Funktion $x \mapsto h(x)$ an, so daß $h^{-1}(0)$ nicht konvex ist. Finden Sie gerne ein Beispiel, das sich von der Vorlesung unterscheidet.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Es seien $x^* \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß die Kugeln $\mathcal{B}_\varepsilon(x^*)$ und $\operatorname{cl}(\mathcal{B}_\varepsilon(x^*))$ konvex sind, aber $\partial\mathcal{B}_\varepsilon(x^*)$ nicht konvex ist.

Aufgabe 5 (0 Punkte). Es sei $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin linear, $C \subset \mathbb{R}^n$ und $D \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

a) $\boldsymbol{A}(C) := \{\boldsymbol{A}(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ ist konvex, wenn C konvex ist.

b) $\boldsymbol{A}^{-1}(D) := \{x \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}(x) \in D\}$ ist konvex, falls D konvex ist.

Aufgabe 6 (0 Punkte). a) Es seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Zeigen Sie, daß ihre Minkowski-Summe $X + Y := \{z = x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ konvex ist.

b) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ konvex. Dann ist $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in K \text{für ein } y \in \mathbb{R}^m\}$ auch konvex.

Aufgabe 7 (0 Punkte). Beweisen Sie den *Satz von Caratheodory*: Jeder Vektor x aus der konvexen Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ läßt sich als Konvexkombination von höchstens $d + 1$ Elementen aus X darstellen.

Hinweis: Nach Lemma 1.18 der Vorlesung existiert eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie als Induktionsschritt, daß sich für $m \geq d + 2$ diese Darstellung um ein Element auf eine Summe von $m - 1$ Elementen reduzieren läßt.

Aufgabe 8 (0 Punkte). Es seien $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und konvex sowie $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ konvex. Für $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ ist auch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \tag{1.2}$$

konvex. Falls sogar eine der Funktionen strikt konvex ist, dann ist es auch f.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 2

Ausgabe: 26.04.2018
Abgabe: 03.05.2018

Aufgabe 9 (6 Punkte). Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$\|\mathfrak{P}_X(y) - \mathfrak{P}_X(x)\| \leq \|y - x\| \quad \text{für alle } x, y \in X, \tag{2.1}$$

d.h. der Operator $x \mapsto \mathfrak{P}_X(x)$ ist lipschitzstetig und beschränkt.

Aufgabe 10 (6 Punkte). Bestimmen Sie zunächst grafisch, dann rechnerisch für den zulässigen Bereich $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0\}$ jeweils den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(y)$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_{\text{lin}}(y)$ im Punkt y. Genügt y den Regularitätsbedingungen von Abadie?

a) $g(x) = (x_2 - x_1^5, -x_2)^T,\ y = (0,0)^T$.

b) $g(x) = (x_2^2 - x_1 + 1, 1 - x_1 - x_2)^T,\ y = (1,0)^T$.

Aufgabe 11 (6 Punkte). Sei $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg ohne Überkreuzung in $\text{cl}(\gamma(0,1))$ mit $\gamma' \neq 0$. Dann ist $\mathcal{T}_X(x)$ identisch mit der Tangente an die Kurve in $x = \gamma(t)$ für jedes $t \in (0,1)$.

Aufgabe 12 (6 Punkte). Stellen Sie die KKT-Bedingungen für die folgenden Optimierugsprobleme auf:

a)

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 &\to \min_{x,y} \\ \text{mit den NB} \quad x^2 + y^2 &\leq 5, \\ x + y &\leq 3, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 20x - 20y &\to \min_{x,y} \\ \text{mit den NB} \quad x^2 + y^2 &\leq 5, \\ 6x + 2y &\leq 9. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 3

Ausgabe: 03.05.2018
Abgabe: 11.05.2018

Aufgabe 13 (6 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{q\times n}$. Dann ist entweder das System

$$Ad < 0 \tag{3.1}$$

lösbar, oder das System

$$A^\top \lambda = 0, \lambda \geq 0, \lambda \neq 0 \tag{3.2}$$

hat eine Lösung.

Hinweis: Lemma 1.41 (Farkas)

Aufgabe 14 (6 Punkte). Für gegebene Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) &\to \min_x \\ \text{mit den NB} \quad \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ x_i &\geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sei $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ eine Lösung. Aufgenommen, dass für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ die Funktion f_i im Punkt $\tilde{x}_i$ differenzierbar ist. Zeigen Sie: Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f_i'(\tilde{x}_i) &\geq \alpha, \\ (f_i'(\tilde{x}_i) - \alpha)\tilde{x}_i &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Aufgabe 15 (6 Punkte). Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ & x_3 - \frac{1}{2}x_1^2 \\ \text{mit den NB}\quad & x_3 + x_2 + x_1^2 \geq 0, \\ & x_3 - x_2 + x_1^2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sei $x^* = (0,0,0)^T$.

- Gibt es zu x^* Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^3$ derart, dass (x^*, λ^*) den KKT-Bedingungen genügt?

- Welche der Regularitätsbedingungen Abadie CQ, MFCQ, LICQ sind erfüllt?
- Von welcher Art ist der Punkt x^*?

Programmieraufgabe 1 (10 Punkte). Implementieren Sie das Newton-Verfahren zur numerischen Lösung des Problems $F(x) = 0$, wobei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, für $d = 2, 3$.

Algorithmus: Newton-Verfahren
Input: $F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$,
$x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$,
$i_{\max} \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$

1: $k \leftarrow 0$,
2: $r^{(k)} \leftarrow -F(x^{(k)})$,
3: **while** $k < i_{\max}$ and $\left\|r^{(k)}\right\| \geq \varepsilon$ **do**
4: $\quad W^{(k)} \leftarrow F'(x^{(k)})$,
5: $\quad$ Löse $W^{(k)} q^{(k)} = r^{(k)}$,
6: $\quad x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + q^{(k)}$,
7: $\quad k \leftarrow k + 1$,
8: $\quad r^{(k)} = -F(x^{(k)})$.
9: **end while**

Das lineare System im Schritt 5 soll mithilfe der Cramerschen Regel gelöst werden. Testen Sie Ihre Implementierung mit $x_0 = (1, 2, 3)$, um eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - z + 1 &= 0, \\ xy^2 - x - 3y + yz + 2 &= 0, \\ xz^2 - 3z + yz^2 + xy &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

zu approximieren.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen. Abgabe innerhalb der Woche 14.05.–18.05.2018 in den beiden CIP-Pools. Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 4

Ausgabe: 10.05.2018
Abgabe: 17.05.2018

Aufgabe 16 (6 Punkte). Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und beschränkt. Wir definieren einen neuen Operator $f \mapsto Lf$ durch

$$(Lf)(x) := \inf_y \{f(y) \mid Ly = x\}. \tag{4.1}$$

Zeigen Sie, daß $(Lf)(x)$ konvex ist.

Aufgabe 17 (6 Punkte). Zeigen Sie, daß die Regularitätsbedingung Abadie-CQ nicht die Regularitätsvoraussetzung MFCQ impliziert.

Aufgabe 18 (6 Punkte). Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad h(x,y) := x^2 + y^2. \tag{4.2}$$

Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$f(x,y) \to \min! \quad \text{auf} \quad M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 4\big\} \tag{4.3}$$

unter Verwendung von Bedingungen erster und zweiter Ordung.

Aufgabe 19 (6 Punkte). Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von Satz 1.70 (konvexe Ungleichungsnebenbedingungen, affin-lineare Gleichungsnebenbedingungen), daß $\mathcal{T}_{\text{strict}}(x^*) \subset \mathcal{T}_X(x^*)$.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 5

Ausgabe: 17.05.2018
Abgabe: 31.05.2018

Aufgabe 20 (6 Punkte). Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 6x - 4y \quad \text{und} \quad g(x,y) := \begin{pmatrix} y-2 \\ x+y-3 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$f(x,y) \to \min! \quad \text{auf} \quad M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \le 0\right\} \tag{5.2}$$

unter Verwendung der KKT-Bedingungen.

Aufgabe 21 (6 Punkte). Seien $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ konvexe und beschränkte Funktionen. Wir definieren einen neuen Operator $(g,h) \mapsto (g \,\Box\, h)$ durch

$$(g \,\Box\, h)(x) := \inf_y \{g(x-y) + h(y)\}. \tag{5.3}$$

Zeigen Sie, daß $(g \,\Box\, h)(x)$ konvex ist.
Hinweis: Aufgabe 16.

Aufgabe 22 (6 Punkte). Wir betrachten eine Variante des Newton-Verfahrens zur Minimierung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Sei dazu $x^* \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt von f, d.h. $\nabla f(x^*) = 0$. Nun soll die folgende quadratische Näherung an f minimiert werden:

$$q^{(k)}(x) := f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}),$$

wobei $x^{(k)}$ den aktuellen Iterationspunkt bezeichnet. Man erhält folgenden
Algorithmus 1 (Lokales Newton-Verfahren für stationäre Punkte).

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon \ge 0$, setze $k := 0$.
2: Ist $\|\nabla f(x^{(k)})\|_2 \le \epsilon$: STOP.
3: Bestimme $d^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}). \tag{5.4}$$

4: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$, $k := k+1$ und gehe zu Schritt (2).

Sei nun $\nabla^2 f(x^*)$ regulär. Ferner sei $\nabla^2 f$ lokal Hölder-stetig, d.h. es ist

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \le K \|x - y\|^\alpha \tag{5.5}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und ein festes $\alpha \in (0,1]$ (für $\alpha = 1$ erhält man wieder die lokale Lipschitz-Stetigkeit). Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x^{(0)} \in B_\delta(x^*)$ gilt:

a) Algorithmus 1 ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen x^* konvergente Folge $\big(x^{(k)}\big)$.

b) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c\|x^{(k)} - x^*\|^{1+\alpha}$. Im Spezialfall $\alpha = 1$ ergibt sich also wieder die schon bekannte quadratische Konvergenz.

Programmieraufgabe 2 (10 Punkte). Betrachten Sie das Optimierungproblem

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min_{x \in \mathbb{R}^d} \\ \text{mit den NB} \quad h_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.6}$$

In diesem Fall ist die Lagrange-Funktion gegeben durch

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \langle \mu, h(x) \rangle = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j h_j(x) \tag{5.7}$$

und die KKT-Bedingungen lauten

$$\Phi(x, \mu) = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(x, \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x, \mu) \\ h(x) \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Um das nichtlineares Gleischungssystem $\Phi(x, \mu) = 0$ zu lösen, verwenden wir das Newton-Verfahren. Dann erhalten wir den folgenden

Algorithmus: Lagrange-Newton Verfahren

Input: $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ (wie in (5.8) definiert)
$(x^{(0)}, \mu^{(0)}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$,
$i_{\max} \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$

Setze $k \leftarrow 0$
while $k < i_{\max}$ and $\left\|\Phi(x^{(k)}, \mu^{(k)})\right\| \geq \varepsilon$ **do**
    Setze $W^{(k)} \leftarrow \Phi'(x^{(k)}, \mu^{(k)})$
    Löse das lineare Gleichungssystem

$$W^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \mu^{(k)} \end{bmatrix} = -\Phi(x^{(k)}, \mu^{(k)})$$

    Setze

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ \mu^{(k+1)} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \mu^{(k)} \end{bmatrix}$$

    und $k \leftarrow k + 1$
end while

Programmieren Sie so, dass d und n einfach geändert werden können. Vermeiden Sie mehrfache Auswertungen von Φ etc. an derselben Stelle.

Das lineare System im Schritt 4 soll mithilfe der LAPACK Subroutine `dsysv` gelöst werden. Testen Sie Ihre Implementierung u.a. mit $x^{(0)} = (2, 0.5, 2)^\top$ und $\mu^{(0)} = (0, 0)^\top$, um eine Lösung des Optimierungproblems

$$\begin{aligned} 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \to \min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} \\ \text{mit den NB} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25, \\ 8x_1 - 14x_2 - 7x_3 = 56 \end{aligned}$$

zu approximieren.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen. Abgabe innerhalb der Woche 4.06.–8.06.2018 in den beiden CIP-Pools. Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 6

Ausgabe: 30.05.2018
Abgabe: 07.06.2018

Aufgabe 23 (6 Punkte). Sei $\beta \in \mathbb{R}$ konstant. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - \beta)^4 \to \min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \\ \text{mit den NB} \quad 1 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ 1 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ 1 + x_1 - x_2 \geq 0, \\ 1 + x_1 + x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

(a) Für welche Werte von β erfüllt $x^* = (1, 0)^\top$ die KKT-Bedingungen?

(b) Zeigen Sie, daß für $\beta = 1$ nur die erste Ungleichungsbedingung aktiv in der Lösung ist. Finden Sie diese Lösung.

Aufgabe 24 (6 Punkte). Seien $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch, positiv, definit und $a_i, b_j \in R^d$ für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} Q & A & B \\ A^\top & 0 & 0 \\ B^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$(\Delta x, \lambda, \mu)^\top = (0, 0, 0)^\top$ ist.

Aufgabe 25 (6 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und $b \in \mathbb{R}^n$. Formulieren Sie das Problem, die kürzeste Entfernung von einem gegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$ zu der Hyperebene $\{x \mid Ax = b\}$ zu finden als eine restringierte quadratische Optimierungsaufgabe. Finden Sie den optimalen Multiplikator μ^* und die Lösung x^* dieser Aufgabe.

Aufgabe 26 (6 Punkte). Betrachten Sie den Algorithmus 1.110. Angenommen, $x^{(k)}$ ist zulässig und der Punkt $x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ nicht. Zeigen Sie, daß der Punkt $x^{(k)} + \tau_k \Delta x^{(k)}$ mit

$$\tau_k := \frac{\alpha_l - a_l^\top x^{(k)}}{a_l^\top \Delta x^{(k)}} = \min\left\{ \frac{\alpha_i - a_i^\top x^{(k)}}{a_i^\top \Delta x^{(k)}} : i \notin \mathfrak{A}(x^{(k)}) \text{ mit } a_i^\top \Delta x^{(k)} > 0 \right\}. \tag{6.3}$$

zulässig ist.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 7

Ausgabe: 07.06.2018
Abgabe: 14.06.2018

Aufgabe 27 (6 Punkte). Angenommen, daß $x_j = j$ für $j = 0, 1, 2, 3$ und

$$P_{01}(x) = 2x + 1, \quad P_{02}(x) = x + 1 \quad \text{und} \quad P_{123}(2.5) = 3. \tag{7.1}$$

Bestimmen Sie $P_{0123}(5/2)$.

Aufgabe 28 (6 Punkte). Bestimmen Sie das Hermitesche Interpolationspolynom P für die Funktion f, gegeben durch $f(x) := \cos x$, unter Vorgabe von Funktionswerten und ersten Ableitungen an den Stellen 0, $\frac{\pi}{2}$ und π. Demonstrieren Sie dabei die Vorberechnung des dividierte-Differenzen-Schemas.

Aufgabe 29 (6 Punkte). Mithilfe von Induktion nach r, zeigen Sie, daß

$$f[t_i, \ldots, t_{i+r}] = \sum_{j=i}^{i+r} \alpha_j f^{(s_j-1)}(t_j) \quad \text{und} \quad \alpha_{i+r} \neq 0, \tag{7.2}$$

wobei s_j die Vielfachheit von t_j in $\{t_i \leq \ldots \leq t_j\}$ ist.

Programmieraufgabe 3 (10 Punkte). Implementieren Sie die Hermite-Interpolation. Als Eingabe bzw. hart einprogrammiert soll das Programm von den Parametern k (Anzahl verschiedener Stützstellen -1), den Vielfachheiten n_i für $i = 0, \dots k$ und den zu interpolierenden Werten f_i, $i = 0, \dots n$, ausgehen.

Teilen Sie Ihr Programm auf in eine Funktion zum Berechnen der dividierten Differenzen nach dem rekursiven Dreiecksschema, die einmalig benutzt wird, und eine Funktion zum Auswerten des Interpolationspolynoms per Horner-Schema an beliebiger Stelle x, die wiederholt aufgerufen werden kann.

Führen Sie damit folgende Anwendungsbeispiele vor.

1. Wählen Sie die kubische Hermite-Interpolation $k = 1$, $n_i = 2$, $\bar{x}_i = i$. Setzen Sie für $l = 0, 1, 2, 3$ nacheinander $(h_l)_i = \delta_{li}$, um die vier Hermite-Standardpolynome $h_l(x)$ zu erhalten. Geben Sie für jedes davon 19 gleichverteilte Auswertungen aus und überprüfen Sie grob die Interpolationsbedingungen.

2. Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

   auf dem Intervall $[-1, 1]$. Verwenden Sie dazu 8 Bedingungen in den folgenden zwei Varianten.

   - Äquidistante Funktionsauswertungen zwischen -1 und 1.
   - Drei Teilintervalle $[-1, -1/3]$, $[-1/3, 1/3]$, $[1/3, 1]$. Auf jedem ist eine separate kubische Hermite-Interpolation durchzuführen, wobei das Endresultat stückweise zusammengesetzt wird.

   Vergleichen Sie die beiden Interpolationen grafisch, also durch Auswertung der Interpolation an einer aussagekräftigen Menge von Stellen.

3. Erstellen Sie das Taylorpolynom von $\sin(x)$ in $x = 0$ jeweils zu den Graden 3, 6, und 10 durch allgemeine Hermite-Interpolation und plotten Sie es zwischen $[-8\pi, 8\pi]$.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse grafisch dar. Dazu können Sie Paare $(t, P(t))$ hintereinander ausgeben und z.B. an das Programm `gnuplot` weiterreichen. Die CIP-Tutoren helfen Ihnen gerne.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen. Abgabe innerhalb der Woche 18.06.-22.06.2018 in den beiden CIP-Pools. Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 8

Ausgabe: 14.06.2018
Abgabe: 21.06.2018

Aufgabe 30 (6 Punkte). Zu gegeben monoton wachsenden Knoten t_i, $i \in \mathbb{Z}$, seien $B_{i,r}$ die zugehörigen B-Splines. Zeigen Sie unter Benutzung der B-Spline-Rekursion

a) $B_{i,r}(x) = 0$ für $x \notin [t_i, t_{i+r})$,

b) $B_{i,r}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

c) $B_{i,r}(x)$ ist auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1})$ ein Polynom vom Grad $\leq r-1$.

Aufgabe 31 (6 Punkte). Zu gegebenen Knoten $t_i = i \in \mathbb{Z}$, seien $B_{i,r}$ die zugehörigen B-Splines. Zeigen Sie

a) $B_{i+1,k}(x) = B_{i,k}(x-1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

b) $B_{i,r}(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} B_{i,r-1}(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32 (6 Punkte). a) Zeichnen Sie für ein festes $i \in \mathbb{Z}$ die B-Splines $B_{i,r}(x)$ der Ordnungen $r = 1, \ldots, 4$.

b) Bestimmen Sie für die quadratischen B-Splines deren Werte an den Knoten t_k, also $B_{i,3}(t_k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und verifizieren Sie $\sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,3}(x) = 1$.

c) Geben Sie $B_{i,2}(x)$ und $B_{i,3}(x)$ in der Darstellung

$$B_{i,2}(x) = \begin{cases} ? & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ ? & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ ? & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.1}$$

und

$$B_{i,3}(x) = \begin{cases} ? & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ ? & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ ? & x \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ ? & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.2}$$

an.

Aufgabe 33 (6 Punkte). Betrachten Sie die Spline-Konstruktion auf Δ, und erweitern Sie sie für periodische Funktionen mit Glattheitbedingungen $p^{(j)}(a) = p^{(j)}(b)$, $-1 \leq j \leq l_0 \leq r-2$.

- Wie viele weitere Stützstellen links von a und rechts von b müssen wir anbauen, und wo liegen sie genau?
- Für $r = 2$ identifizieren Sie die Basisfunktionen miteinander, die aus dem Interval $[a, b)$ herausragen, um die korrekte Dimension $n-(l_0+1)$ zu erhalten.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 9

Ausgabe: 21.06.2018
Abgabe: 28.06.2018

Aufgabe 34 (6 Punkte). Finden Sie die allgemeine Lösung für die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen und die Region in der tu-Ebene, in der eine eindeutige Lösung existiert.

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{tu}{t+1}$

b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t+u}{t-u}$

Hinweis für (b): Substitution $u = vt$.

Aufgabe 35 (9 = 3 + 6 Punkte). Betrachten Sie die AWA

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0. \tag{9.1}$$

Hier ist $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ eine Unterteilung des Intervalls $[0, T]$. Formulieren Sie (9.1) als eine Integralgleichung auf dem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ und approximieren Sie das Integral mithilfe der folgenden Integrationsregeln:

- Trapezregel,
- Simpsonregel.

Setzen Sie die unbekannten Terme $u(t_k + q)$ mit einem passenden expliziten Euler-Verfahren an. Schreiben Sie jeweils das RK-Tableau für die resultierenden Methoden auf.

Programmieraufgabe 4 (10 Punkte). Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Implementieren Sie das explizite Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung der autonomen GDG

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = F(u(t)), \quad u(0) = u_0 \tag{9.2}$$

auf einer Menge an Zeitschritten $t_k = \tau k$, wobei Sie m und τ übergeben. Die Dimension $d \geq 1$ ist ebenfalls ein Parameter. Hier soll die Auswertung von $F(u)$ durch einen Funktionsaufruf erfolgen, den Sie geeignet (parametrisiert mit d) gestalten.

- Testen Sie Ihre Implementierung, um eine Lösung der eindimensionalen AWA

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{1}{2}u, \quad u(0) = 1 \tag{9.3}$$

  zu approximieren.

- Betrachten Sie die Bewegung eines Körpers im Schwerefeld eines (wesentlich schwereren und unbeweglichen) Zentralkörpers im Ursprung. Die Körper werden als Punktmassen beschrieben. Wir geben Anfangswert und -geschwindigkeit des leichten Körpers im Unterraum $\mathbb{R}^2$ an, damit erfolgt die gesamte Bewegung im $\mathbb{R}^2$.

  Die Position des leichten Körpers ist nun eine Funktion der Zeit mit Koordinatenfunktionen $u(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Laut Newtonschem Gesetz erfüllen sie die folgende Gleichung:

$$u''(t) = -\gamma \begin{pmatrix} \frac{x_1(t)}{r(t)^3} \\ \frac{x_2(t)}{r(t)^3} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \quad . \tag{9.4}$$

  Die Zahl $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ist gegeben (Gravitationskonstante mal Masse des Zentralkörpers), also für den Mond z.B. 4.9e12 in den offiziellen physikalischen Einheiten. Formulieren Sie (9.4) als System von GDG erster Ordnung, $d = 4$, und nutzen Sie ihre Implementierung, um eine Lösung dieses Systems mit Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1 - \epsilon, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = \sqrt{\gamma(1+\epsilon)/(1-\epsilon)} \tag{9.5}$$

  zu approximieren (ϵ wählbar).

Testen Sie das explizite Eulerverfahren und das Heunsche Verfahren 3. Ordnung wie unten, und versuchen Sie, eine ganze Umdrehung des Körpers zu erfassen (experimentieren Sie dazu mit T und τ). Plotten Sie die Bahn und testen Sie den Einfluß von τ auf die Genauigkeit und Rechenzeit.

$$\begin{array}{l|lll} & 0 & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen. Abgabe innerhalb der Woche 02.07.–06.07.2018 in den beiden CIP-Pools. Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 10

Ausgabe: 28.06.2018
Abgabe: 05.07.2018

Aufgabe 36 (6 Punkte). Zeigen Sie, daß das Runge-Kutta-Verfahren aus der Vorlesung äquivalent geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} u_i &= u^{(k)} + \tau_k \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_k + \tau_k c_j, u_j), \\ u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \tau_k \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_k + \tau_k c_j, u_j). \end{aligned} \tag{10.1}$$

Zeigen Sie weiterhin, daß Sie die zweite Zeile in die Form der ersten bringen können mit geeigneten $a_{s+1,j} = ?$. Dies kann beim Programmieren eine Vereinfachung sein.

Aufgabe 37 (1 + 3 + 1 + (2 + 5) Punkte). Ein Runge-Kutta-Verfahren liefert keine Vorschrift, wie die Lösung innerhalb des Intervalls $t \in (t_{k-1}, t_k)$ ausgewertet werden kann. Als Ausweg wurden die stetigen RK-Verfahren entwickelt:

1. Wir übernehmen die Parameter s, c_i und a_{ij} eines beliebigen RK-Verfahrens.
2. Wir berechnen die Stufen k_i wie bisher.
3. Wir verallgemeinern zu Polynomen $b_j(z)$ und machen den Ansatz

$$u(t) = u^{(k)} + \tau_k \sum_{j=1}^{s} b_j(z(t)) k_j, \tag{10.2}$$

   wobei $z(t) = (t - t_k)/\tau_k \in [0, 1]$.

Bestimmen Sie nun die $b_j(z)$, indem Sie verlangen, daß das Verfahren exakt ist für die Funktion

$$u(t) = \sum_{i=0}^{s} v_i (t - t_k)^i \qquad \text{und} \qquad u^{(k)} = u(t_k). \tag{10.3}$$

- Begründen Sie, daß $v_0 = u^{(k)}$.
- Betrachten Se die restlichen v_i als beliebig. Dies führt zu s Bedingungen an die s Polynome $b_j(z)$. Geben Sie dieses System an.
- Bestimmen Sie das Polynom $b_1(z)$ für alle Verfahren mit $s = 1$.

- Bestimmen Sie die Polynome für die klassischen RK-Verfahren der Stufen $s = 2, 3$:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

  Verifizieren Sie, daß die traditionellen Koeffizienten $b_j = b_j(1)$ erfüllen.

Aufgabe 38 (0 Punkte). Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$A'(t) = -\beta(t)A(t), \qquad A(t_0) = A_0. \tag{10.4}$$

1. Weisen Sie die exakte Lösung nach:

$$A(t) = A(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} -\beta(t')\,\mathrm{d}t'\right). \tag{10.5}$$

2. Was ist die Evolution Φ^{t,t_0}? Verifizieren Sie $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^{t,t_0})A(t_0) = f(t, A(t))$.

3. Zeigen Sie die Gruppeneigenschaften

$$\Phi^{t_1,t_1} = 1, \qquad \Phi^{t_2,t_1} = \left(\Phi^{t_1,t_2}\right)^{-1}, \qquad \Phi^{t_2,t_1}\Phi^{t_1,t_0} = \Phi^{t_2,t_0}. \tag{10.6}$$

4. Für Abenteuerlustige: Wiederholen Sie die Aufgabe für $B' = \gamma(t) - \beta(t)B$. Ein Baustein der exakten Lösung ist $\int \gamma(t')/A(t')\,\mathrm{d}t'$.

Aufgabe 39 (0 Punkte). Betrachten Sie die die Funktion

$$\psi(t, u) = e^t(1 + u) - 1. \tag{10.7}$$

Zeigen Sie, daß sie die Eigenschaften eines Phasenflusses $\Phi^t(u) = \psi(t, u)$ erfüllt. Finden Sie die zugehörige AWA.

Aufgabe 40 (0 Punkte). Betrachten Sie die AWA

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = u - u^3, \quad u(0) = u_0. \tag{10.8}$$

Finden Sie den Phasenfluß Φ^t und überprüfen Sie, daß $\Phi^t\Phi^s u = \Phi^{t+s}u$.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 11

Ausgabe: 05.07.2018
Abgabe: 12.07.2018

Aufgabe 41 (6 Punkte). Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & a & b & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Verifizieren Sie, daß das zugehörige Verfahren Konsistenzordnung $p = 1$ besitzt und $p = 2$ genau dann, wenn es invariant unter Autonomisierung ist.

b) Finden Sie die Konstanten a und b so, daß das Schema ein Verfahren dritter Ordnung definiert.

Aufgabe 42 (6 Punkte). Betrachten Sie die DGL

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, x) \tag{11.1}$$

und die zugehörige Evolution $\Phi^{t,s}$. Sei $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine invertierbare Matrix.

a) Zeigen Sie, daß die Koordinatentransformation $\hat{x} = Mx$ das Folgende ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t}(t) = Mf(t, M^{-1}\hat{x}), \tag{11.2}$$

$$\hat{\Phi}^{t,s} = M\Phi^{t,s}M^{-1}\hat{x}. \tag{11.3}$$

b) Betrachten Sie die Diskretisierung von (11.1) und (11.2) mit Hilfe eines beliebiges Runge-Kutta Verfahrens. Seien $\Psi^{t+\tau,t}$ und $\hat{\Psi}^{t+\tau,t}$ die zugehörigen diskreten Evolutionen. Zeigen Sie, daß

$$\hat{\Psi}^{t+\tau,t} = M\Psi^{t+\tau,t}M^{-1}\hat{x}. \tag{11.4}$$

Aufgabe 43 (0 Punkte). Gegeben sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) + ty(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{11.5}$$

Berechnen Sie mit dem 2-stufigen Verfahren von Heun eine Lösung der Differentialgleichung im Punkt $t = 1$ mit der Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 44 (0 Punkte). Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ q & a & \\ \hline & b & c \end{array}$$

mit $q > 0$. Finden Sie die Konstanten a, b und c so, daß das Schema invariant unter Autonomisierung ist und ein Verfahren zweiter Ordnung definiert.

Programmieraufgabe 5 (10 Punkte). Erweitern Sie das Runge-Kutta Lösungsverfahren fuer AWA aus der letzten Programmieraufgabe auf zeitabhängige rechte Seiten $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Vergleichen Sie das explizite Euler-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung aus Aufgabe 41 hinsichtlich der Genauigkeit und Rechenzeit abhängig vom Zeitschritt τ. Sehen Sie für $\tau \to 0$ die richtige Konvergenzordnung? Ab welchem τ geht die numerische Lösung gegen unendlich für lange Zeiten?

- Die AWA sei gegeben durch $d = 1$, $A'(t) = -\beta(t)A(t)$, $A(0) = 1$. Verwenden Sie jeweils Funktionsaufrufe für $\beta(t)$ und $f(t, A)$. Vergleichen Sie auf $t \in [0, 1]$ mit der exakten Lösung, und zwar für $\beta(t) = 3$ und $\beta(t) = 1 + \sin(2\pi t)$, in Abhängigkeit von τ.

- Betrachten Sie $B'(t) = \gamma(t) - \beta(t)B(t)$. Testen Sie verschiedene Werte von γ, β konstant und suchen Sie den größtmöglichen Zeitschritt, für den die numerische Lösung nicht gegen unendlich geht. Wie ist der Zusammenhang? Wie ist die Fehlerordnung zur exakten Lösung

$$B(t) = A(t) \left(\frac{B(0)}{A(0)} + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{A(s)} \, \mathrm{d}s \right) \tag{11.6}$$

  für $\tau \to 0$?

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen. Abgabe vom 16.07. bis zum 18.07.2018 in den beiden CIP-Pools. Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 12

Ausgabe: 12.07.18
Abgabe: keine

Aufgabe 45 (0 Punkte). (Diese Aufgabe ist kein Klausurstoff, aber trotzdem erhellend.)

Geben Sie eine explizite Formel für die kardinalen B-Splines $N_r(x)$ für $r = 2, 3$ an. Welchen B-Splines zu welchen Knoten entsprechen sie? Es ist

$$N_1(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \qquad \text{und} \qquad N_{r+1} = N_1 * N_r,$$

also die iterative Faltung.

Aufgabe 46 (0 Punkte).

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = -\frac{1}{2}tx^2, \quad x(0) = 1$$

im Intervall $[0, 2]$ mit dem impliziten Eulerverfahren und dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung für die Schrittweite $\tau = 1$. (Beim impliziten Euler-Verfahren ergibt nur eine der zwei Lösungen Sinn – warum?)

b) Berechnen Sie die exakte Lösung von (a) und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.

Aufgabe 47 (0 Punkte). Schreiben Sie (11.6) als eine Evolution Φ^{t,t_0} und zeigen Sie die Gruppeneigenschaften

$$\Phi^{t_1,t_1} = \mathrm{id}, \qquad \Phi^{t_2,t_1} = \left(\Phi^{t_1,t_2}\right)^{-1}, \qquad \Phi^{t_2,t_1} \circ \Phi^{t_1,t_0} = \Phi^{t_2,t_0}. \tag{12.1}$$

Aufgabe 48 (0 Punkte). Bestimmen Sie die Konstante q so, daß

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z + qz^2}{1 - \frac{1}{2}z + qz^2} \tag{12.2}$$

Konsistenzordnung $p = 4$ hat.

Aufgabe 49 (0 Punkte). Betrachten Sie die autonome Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{12.3}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Der diskrete Phasenfluß eines s-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahrens besitzt die Form

$$\Psi^\tau x_0 = P(\tau A), \qquad P \in \Pi_s. \tag{12.4}$$

Rechnen Sie P für das Heun-Verfahren aus und überprüfen Sie die Konsistenzordnung anhand dieser Darstellung.

Einführung in die Numerische Mathematik

Universität Bonn, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 13. August 2018

Blatt 13

Ausgabe: 17.07.18
Abgabe: keine

Aufgabe 50 (0 Punkte). Betrachten Sie das Verfahren mit dem folgenden Butcher Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Rechnen Sie nach, daß das Verfahren die Differentialgleichung

$$x' = 2at$$

für $a \in \mathbb{R}$ exakt löst, und zwar für alle Zeitschritte und Anfangswerte/-zeiten.

Aufgabe 51 (0 Punkte). Eine diskrete Evolution Ψ auf Ω heißt reversibel, wenn sie die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\Psi^{t,t+\tau}\Psi^{t+\tau,t}x = x \tag{13.1}$$

für alle $(t, x) \in \Omega$ und alle zulässigen (bzw. kleinen) τ.

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{13.2}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, daß diskrete Evolution der folgenden Verfahren reversibel ist:

a) explizites Euler-Verfahren,

b) implizites Euler-Verfahren,

c) implizite Mittelpunktsregel.

Aufgabe 52 (0 Punkte). Gegeben ist die AWA

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{13.3}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, daß die zuhehörige Propagationsmatrix $W(t, s)$ (wie lautet sie?) die folgende AWA löst:

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t, s) = AW(t, s), \qquad W(s, s) = I. \tag{13.4}$$

Aufgabe 53 (0 Punkte). Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\max\ 3x_1 - x_2 - 4x_3^2 \\ \text{mit den NB}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{13.5}$$

unter Verwendung der KKT-Bedingungen.